# Correctievoorschrift VWO

# 2012

tijdvak 1

## wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Inzenden scores

## 1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.
Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

1. De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
2. De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
3. De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.

4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.

5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.

2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.

3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:

3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;

3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;

3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;

3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;

3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.
Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.
Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht.
Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

## 3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 78 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

## 4 Beoordelingsmodel

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Onafhankelijk van *a*

**1 maximumscore 3**

- $F_a'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-ax} + x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \cdot -a$ 2
- Dit geeft $F_a'(x) = (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax}$ (en dit is gelijk aan $f_a(x)$, dus $F_a$ is een primitieve functie van $f_a$) 1

**2 maximumscore 5**

- De oppervlakte van driehoek $OAB$ is $\frac{1}{2a}$ 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f_a$, de $x$-as en de $y$-as is $\int_0^{\frac{1}{a}} (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x = \left[ x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \right]_0^{\frac{1}{a}}$ (of: $F_a(\frac{1}{a}) - F_a(0)$) 1
- Deze oppervlakte is dus $\frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f_a$ en het lijnstuk $AB$ is dus $\frac{1}{2a} - \frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De verhouding is $(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\mathrm{e}a}) : \frac{1}{\mathrm{e}a} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}) : \frac{1}{\mathrm{e}}$, dus onafhankelijk van $a$ 1

of

- De grafiek van $f_a$ en het bijbehorende lijnstuk $AB$ ontstaan uit de grafiek van $f_1$ en het daarbij behorende lijnstuk $AB$ door vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met factor $\frac{1}{a}$ 2
- Hierbij worden zowel de oppervlakte van de driehoek als de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f_1$, de $x$-as en de $y$-as vermenigvuldigd met $\frac{1}{a}$ 2
- De verhouding van deze oppervlakten is dus onafhankelijk van $a$ en daarmee ook de gevraagde verhouding 1

of

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f_a$, de $x$-as en de $y$-as is $\int_0^{\frac{1}{a}} (1 - ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{d}x = \left[ x \cdot \mathrm{e}^{-ax} \right]_0^{\frac{1}{a}}$ (of: $F_a(\frac{1}{a}) - F_a(0)$) 1
- Deze oppervlakte is dus $\frac{1}{\mathrm{e}a}$ 1
- De oppervlakte van driehoek $OAB$ is $\frac{1}{2a}$ 1
- De verhouding van deze oppervlakten is onafhankelijk van $a$ 1
- Dus is ook de gevraagde verhouding onafhankelijk van $a$ 1

## Het standaard proefglas

**3 maximumscore 4**

- Het volume (in mm$^3$) is $\int_{0,0}^{55,3} \pi\left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$ — 1
- Beschrijven hoe deze integraal (met de GR) berekend kan worden — 1
- De uitkomst van deze integraal is (ongeveer) 7994 — 1
- Het antwoord: 8 (cm$^3$) — 1

**4 maximumscore 5**

- ($C(87{,}5;\,32{,}5)$ is de top van de parabool, dus) een formule voor kromme $CD$ is van de vorm $y = a(x-87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 2
- $D(155{,}0;\,23{,}0)$ is een punt van de kromme $CD$, dus $23{,}0 = a(155{,}0-87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- Dit geeft voor $a$ de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) (dus een formule voor kromme $CD$ is $y = -0{,}002 \cdot (x-87{,}5)^2 + 32{,}5$) — 1

of

- (De coördinaten van $C$ zijn $(87{,}5;\,32{,}5)$, dus) de translatie is 87,5 naar rechts en 32,5 omhoog — 1
- (Bij deze translatie wordt $E$ afgebeeld op $D(155{,}0;\,23{,}0)$, dus) de coördinaten van $E$ zijn (67,5; −9,5) — 1
- De kromme $OE$ heeft een formule van de vorm $y = ax^2$, dus $-9{,}5 = a \cdot 67{,}5^2$ — 1
- Dit geeft voor $a$ de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) — 1
- Dus een formule voor kromme $CD$ is $y = -0{,}002 \cdot (x-87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 1

**5 maximumscore 6**

- $50 \text{ ml} = 50\,000 \text{ mm}^3$ — 1
- Gevraagd wordt de waarde van $h$ waarvoor $\int_{55,3}^{h} \pi\left(g(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = 50\,000$, waarbij $h$ de $x$-coördinaat van $P$ is — 1
- Een primitieve van $-x^2 + 175x - 6600$ is $-\frac{1}{3}x^3 + 87{,}5x^2 - 6600x$ — 1
- $\pi\left(\left(-\frac{1}{3}h^3 + 87{,}5h^2 - 6600h\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 55{,}3^3 + 87{,}5 \cdot 55{,}3^2 - 6600 \cdot 55{,}3\right)\right) = 50\,000$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- ($h \approx 81$, dus) de $x$-coördinaat van $P$ is 81 — 1

## Vanuit een parallellogram

**6 maximumscore 3**

- $AD//BC$, dus $\angle ADE = \angle BED$; (*parallellogram*), *Z-hoeken* 1
- $\angle ADE = \angle BDE$; *bissectrice* 1
- Hieruit volgt $\angle BED = \angle BDE$, dus driehoek $BDE$ is gelijkbenig; *gelijkbenige driehoek* 1

**7 maximumscore 4**

- $\angle BDF = \angle EBF$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- (Omdat driehoek $BDE$ gelijkbenig is, geldt) $\angle BEF = \angle BDF$ (dus $\angle BEF = \angle EBF$) 1
- $\angle BFD = \angle EBF + \angle BEF$; *buitenhoek driehoek* 1
- Dus $\angle BFD = \angle BEF + \angle BEF = 2 \cdot \angle BEF$ 1

## Tussen twee sinusgrafieken

**8 maximumscore 4**

- De oppervlakte van $V$ is $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $f(x) - g(x)$ is $-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ 2
- De oppervlakte van $V$ is dus $\left[-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = 2$ 1

**9 maximumscore 4**

- $f(x) + g(x) = \sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2\sin\left(\frac{x + x + \frac{1}{3}\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{x - (x + \frac{1}{3}\pi)}{2}\right)$ 1
- $f(x) + g(x) = 2\sin(x + \frac{1}{6}\pi)\cos(-\frac{1}{6}\pi)$ 1
- Dit geeft $\frac{1}{2} \cdot \left(f(x) + g(x)\right) = \sin(x + \frac{1}{6}\pi) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dus (bijvoorbeeld) $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $b = \frac{1}{6}\pi$ 1

of

- $f(x) + g(x) = 0$ geeft $\sin(-x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ 1
- Dit geeft $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$, dus (bijvoorbeeld) $b = \frac{1}{6}\pi$ 1
- Een toelichting dat het maximum van $f + g$ ligt bij $x = \frac{1}{3}\pi$ 1
- Hieruit volgt (omdat $\frac{1}{2} \cdot \left(f(\frac{1}{3}\pi) + g(\frac{1}{3}\pi)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en omdat $\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi) = 1$) $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

## Drie vierkanten in een rechthoek

**10 maximumscore 8**

- De lengte van de zijde van $B$ is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van $C$ is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van $D$ is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$ 1
- $(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$ 1
- Dus de oppervlakte van $D$ is $600-x^2-900+60x-x^2-x^2+20x-100$ 1
- Deze uitdrukking vereenvoudigen tot $-3x^2+80x-400$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van $x$ (in het interval [10; 20]) dit maximaal is 1
- De gevraagde waarde van $x$ is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- De lengte van de zijde van $B$ is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van $C$ is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van $D$ is maximaal als de totale oppervlakte van $A$, $B$ en $C$ minimaal is 1
- De totale oppervlakte van $A$, $B$ en $C$ is $x^2+(30-x)^2+(x-10)^2$ 1
- $(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$ 1
- Dus de totale oppervlakte van $A$, $B$ en $C$ is $3x^2-80x+1000$ 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van $x$ (in het interval [10; 20]) dit minimaal is 1
- De gevraagde waarde van $x$ is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

of

- De lengte van de zijde van $B$ is $30-x$ 1
- De lengte van de zijde van $C$ is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$ 1
- De oppervlakte van $D$ is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$ 1
- $D'(x)=-2x+2(30-x)-2(x-10)$ 2
- Dit geeft $D'(x)=-6x+80$ 1
- Er moet (in het interval [10; 20]) gelden $D'(x)=0$, dus $-6x+80=0$ 1
- De gevraagde waarde van $x$ is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$) 1

## Een W

**11 maximumscore 5**

- $P$ passeert de lijn met vergelijking $y = x$ als $\cos\left(\frac{4\pi}{15} \cdot t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$ — 1
- Beschrijven hoe de oplossingen van deze vergelijking op het interval [0, 15] gevonden kunnen worden — 1
- Deze oplossingen zijn $t = 0$, $t = 6$, $t = 10$ en $t = 12$ — 2
- $P$ bevindt zich onder de lijn gedurende de tijdsintervallen $\langle 0, 6\rangle$ en $\langle 10, 12\rangle$, dus het antwoord is 8 (seconden) — 1

**12 maximumscore 5**

- $P$ passeert de $y$-as als $\cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) = 0$ — 1
- Dus op weg van $A$ naar $B$ bijvoorbeeld op tijdstip $t = 7\frac{1}{2}$ — 1
- $x'(t) = -\frac{\pi}{15} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$ — 2
- Dit geeft $x'(7\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{15}$, dus de gevraagde snelheid is $-\frac{\pi}{15}$ (m/s) — 1

*Opmerking*
*Als een kandidaat als antwoord $\frac{\pi}{15}$ (m/s) geeft, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

## Verschoven platen

**13 maximumscore 4**

- Driehoek $POA$ is gelijkvormig met driehoek $PQ'Q$ (; *hh*) — 1
- $\dfrac{PQ'}{PQ} = \dfrac{PO}{PA}$ en $PA = \sqrt{p^2 + 35^2}$ (; *Pythagoras*) geeft $\dfrac{p+q}{280} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$ — 2
- Hieruit volgt $p + q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$, dus $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$ — 1

**14 maximumscore 4**

- $q'(p) = \dfrac{280 \cdot \sqrt{p^2 + 1225} - 280p \cdot \dfrac{2p}{2\sqrt{p^2 + 1225}}}{p^2 + 1225} - 1$ — 2
- Dus $q'(p) = \dfrac{280(p^2 + 1225) - 280p^2}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$ — 1
- De rest van de herleiding — 1

**15 maximumscore 6**

| | | |
|---|---|---|
| • | $q'(p)=0$ geeft $\dfrac{343\,000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1=0$ | 1 |
| • | Dit geeft $(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}=343\,000$ | 2 |
| • | Hieruit volgt $p^2+1225=4900$ | 1 |
| • | Dit geeft $p=\sqrt{3675}$ (of $p=35\sqrt{3}$) | 1 |
| • | Het antwoord: $q=3\sqrt{3675}$ (of $q=105\sqrt{3}$) | 1 |

## Evenwijdige lijnen en een rechthoek

**16 maximumscore 4**

| | | |
|---|---|---|
| • | $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$; *Thales* | 1 |
| • | $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek *ABC* en driehoek *CDA* zijn congruent; *ZHH* (of: $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB=90°-\angle BAC$ en $\angle CAD=90°-\angle ACD$; *hoekensom driehoek*) | 1 |
| • | Hieruit volgt $\angle CAD=\angle ACB$, dus $AD//BC$; *Z-hoeken* | 1 |
| • | $AB//CD$, $AD//BC$ en $\angle ABC=90^\circ$, dus vierhoek *ABCD* is een rechthoek; (*parallellogram*), *rechthoek* | 1 |

of

| | | |
|---|---|---|
| • | $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$; *Thales* | 1 |
| • | $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, dus driehoek *ABC* en driehoek *CDA* zijn congruent; *ZHH* (of: $\angle BAC=\angle ACD$; *Z-hoeken*, en $\angle ACB=90°-\angle BAC$ en $\angle CAD=90°-\angle ACD$; *hoekensom driehoek*) | 1 |
| • | Hieruit volgt $\angle CAD=\angle ACB$, dus $\angle BAD=\angle BCD$ | 1 |
| • | $\angle BAD+\angle BCD=180°$, dus $\angle BAD=\angle BCD=90°$, dus vierhoek *ABCD* is een rechthoek; *koordenvierhoek, rechthoek* | 1 |

**17 maximumscore 4**

| | | |
|---|---|---|
| • | $\angle CSE=\angle CDE+\angle DEM$; *buitenhoek driehoek* | 1 |
| • | $\angle DEM=\angle CME$; *Z-hoeken* | 1 |
| • | $\angle CME=2\cdot\angle CDE$; *omtrekshoek* | 1 |
| • | Dus $\angle CSE=\angle CDE+2\cdot\angle CDE=3\cdot\angle CDE$ | 1 |

## 5 Inzenden scores

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 29 mei naar Cito.