Examen HAVO

2016

tijdvak 1
maandag 23 mei
13:30 - 16:00 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift is een aanvulling op het correctievoorschrift opgenomen.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

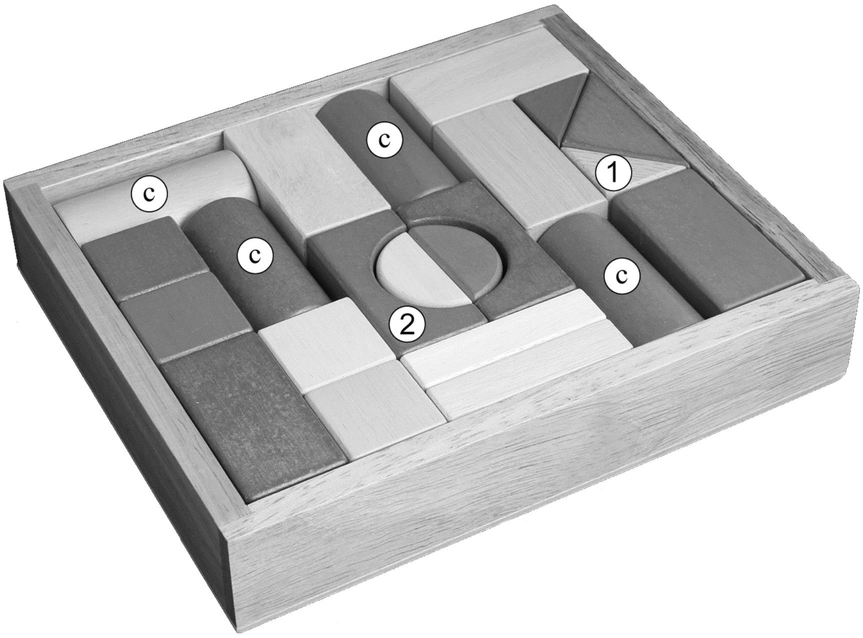
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Blokkendoos

Op foto 1 zie je een blokkendoos gevuld met houten blokken. De blokkendoos bevat onder andere vier cilinders met een diameter van 5 cm en een hoogte van 10 cm. Deze vier cilinders zijn op foto 1 aangegeven met de letter c.

In deze opgave verwaarlozen we de ruimte tussen de blokken, en gaan we er dus van uit dat de blokken strak in de doos passen, en dat alle blokken precies tot de bovenrand van de doos reiken.

foto 1



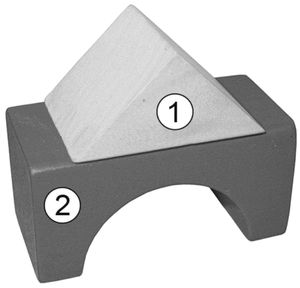
Hoewel alle blokken strak tegen elkaar liggen, blijft er vanwege de vier cilinders toch nog ruimte in de doos over. De doos is dus niet geheel gevuld met het hout van de blokken.

De binnenafmetingen van deze doos zijn 30 bij 25 bij 5 cm.

4p **1** Bereken hoeveel procent van de doos gevuld is met het hout van de blokken. Rond je antwoord af op een geheel aantal procenten.

Op foto 1 zijn twee blokken genummerd. Deze blokken worden op elkaar gelegd. Zie foto 2.

foto 2



Het vooraanzicht van het bouwwerk op foto 2 is symmetrisch. Het bouwwerk bestaat uit:
- blok 1: een prisma met hoogte 5 cm en met als grondvlak een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 5 cm;
- blok 2: een blok in de vorm van een brug met buitenafmetingen 5 bij 5 bij 10 cm.

3p **2** Teken op ware grootte het bovenaanzicht van dit bouwwerk. Licht je werkwijze toe.

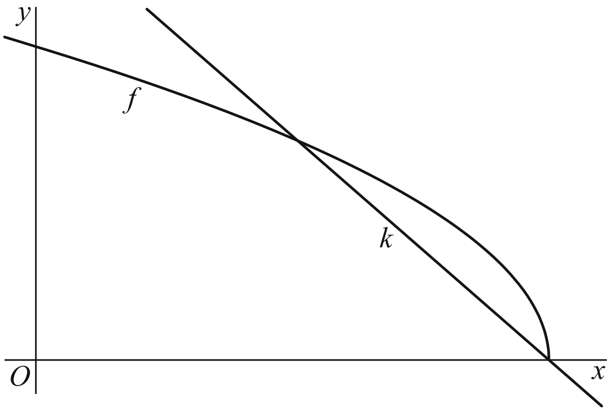
Blok 2, het blok in de vorm van een brug, is een balk van 5 bij 5 bij 10 cm met daaruit weggelaten de helft van een cilinder met diameter 7 cm en hoogte 5 cm.

5p **3** Bereken de totale oppervlakte van dit blok. Geef je antwoord in hele cm^2 nauwkeurig.

Een wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. Lijn k heeft vergelijking $y=-\frac{7}{4}x+\frac{7}{2}$. In figuur 1 zie je de grafiek van f en lijn k.

figuur 1



Lijn k gaat door het gemeenschappelijk punt van de grafiek van f met de x-as.

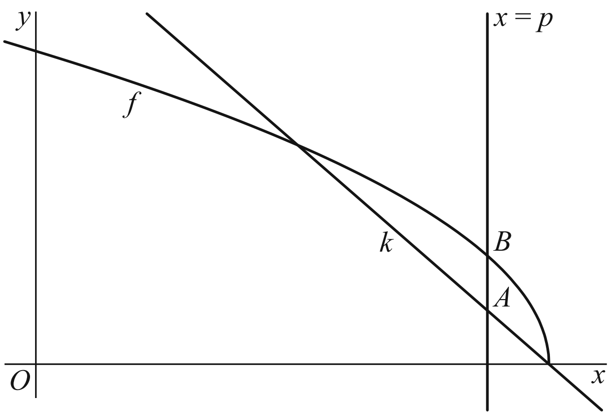
3p **4** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Lijn k en de grafiek van f hebben nog een ander punt gemeenschappelijk.

3p **5** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van dit punt.

De verticale lijn met vergelijking $x=p$ snijdt k in punt A en de grafiek van f in punt B. De y-coördinaat van B is groter dan de y-coördinaat van A. Zie figuur 2.

figuur 2



Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.

6p **6** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p.

Schijngestalten van de maan

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$$P = 50 + 50\sin\left(0{,}212769t - 1{,}042563\right)$$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

3p **7** Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de **schijngestalte** van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn **nieuwe maan**, **eerste kwartier**, **volle maan** en **laatste kwartier**. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

figuur

nieuwe maan	eerste kwartier	volle maan	laatste kwartier	nieuwe maan
0% zichtbaar	50% zichtbaar	100% zichtbaar	50% zichtbaar	0% zichtbaar

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

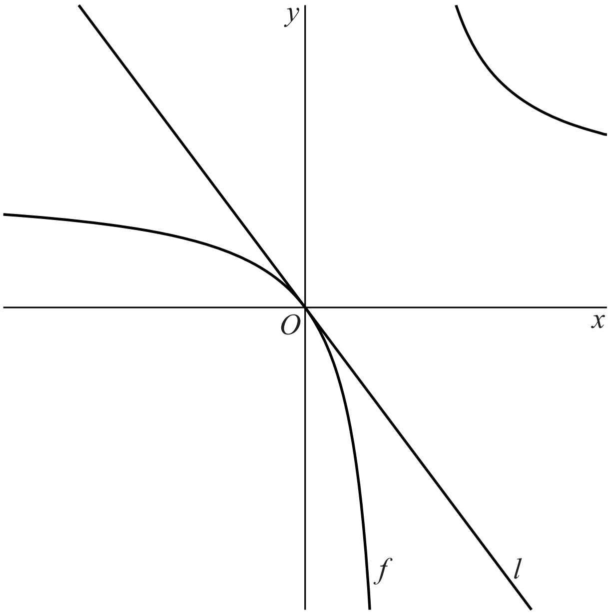
3p **8** Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

4p **9** Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Gebroken functie en raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x)=\dfrac{12}{x-3}+4$. Lijn l raakt in de oorsprong aan de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1



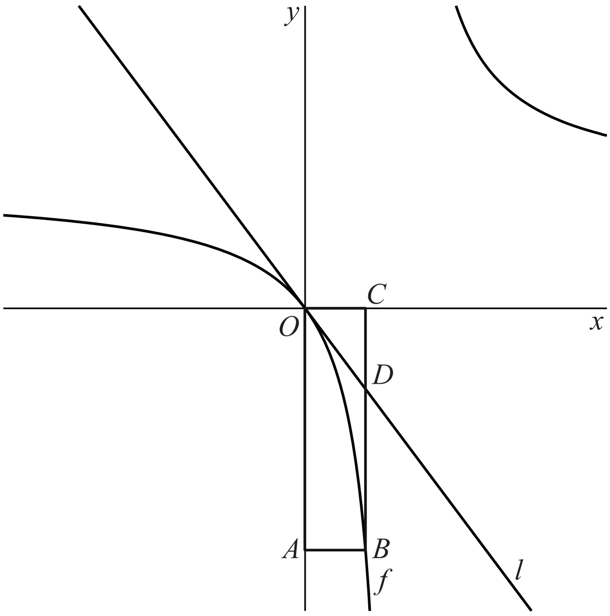
De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{4}{3}$.

3p **10** Toon met behulp van differentiëren aan dat de richtingscoëfficiënt van l inderdaad $-\frac{4}{3}$ is.

Op de grafiek van f ligt punt B met x-coördinaat 2. Punt A ligt op de y-as en heeft dezelfde y-coördinaat als B. Punt C ligt op de x-as en heeft dezelfde x-coördinaat als B.

Lijn l snijdt zijde BC van rechthoek $OABC$ in punt D. Zie figuur 2.

figuur 2

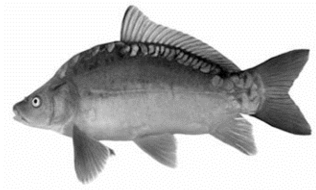


Lijn l verdeelt rechthoek $OABC$ in twee delen: driehoek ODC en trapezium $OABD$.

6p **11** Bereken exact hoeveel keer zo groot de oppervlakte van trapezium $OABD$ is in vergelijking met de oppervlakte van driehoek ODC.

Karpers

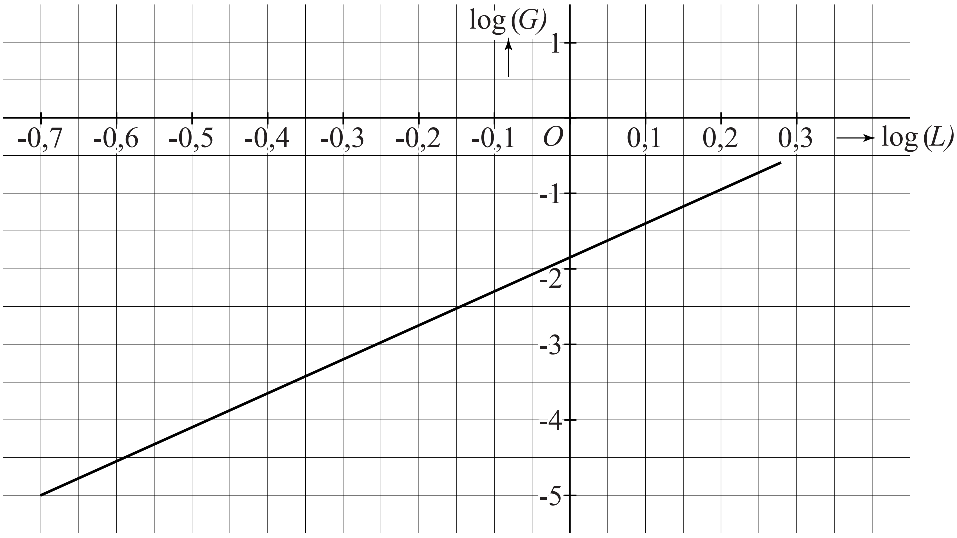
foto



In het begin van hun leven ontwikkelen karpers zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 1,9 cm.

De lengte van de karperlarve in centimeter noemen we L.
Het gewicht van de karperlarve in gram noemen we G.
In de figuur is het verband tussen $\log(L)$ en $\log(G)$ weergegeven.
Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



4p **12** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het gewicht van een karperlarve met een lengte van 0,8 cm. Geef je antwoord in hele milligrammen nauwkeurig.

Het verband tussen de lengte van karperlarven en hun gewicht kan beschreven worden met een formule van de vorm:

$G = 0{,}014 \cdot L^b$ met $0{,}2 \le L \le 1{,}9$

Hierin is L de lengte in centimeter, G het gewicht in gram en b een constante.

Een karperlarve van 1,9 cm weegt ongeveer 0,25 g.

3p **13** Bereken b met behulp van deze gegevens. Rond je antwoord af op één decimaal.

Voor volwassen karpers geldt de formule:

$G = 0{,}014 \cdot L^{3{,}13}$ met $10 \le L \le 94$

Hierin is L weer de lengte in centimeter en G het gewicht in gram.

3p **14** Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

De formule $G = 0{,}014 \cdot L^{3{,}13}$ is te herleiden tot een formule van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

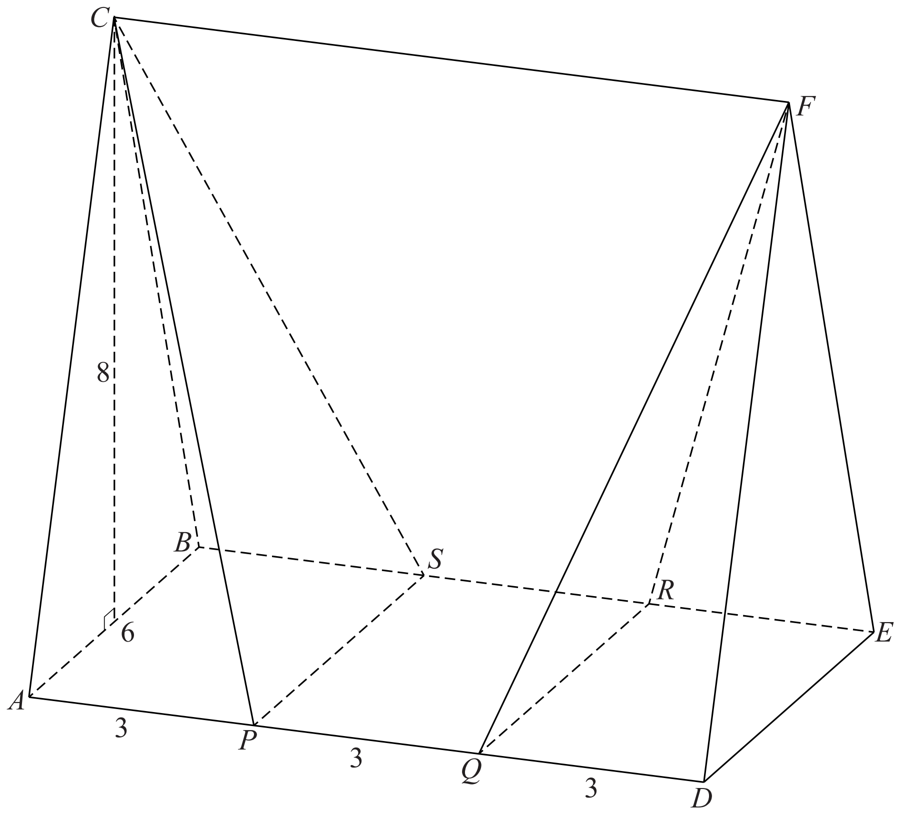
4p **15** Bereken de waarden van p en q. Geef beide waarden in twee decimalen nauwkeurig.

Lichaam $PSC.QRF$

Gegeven is het prisma $ABC.DEF$.
Hierbij is ABC een gelijkbenige driehoek met basis $AB = 6$ cm en bijbehorende hoogte 8 cm. Bovendien geldt $AD = 9$ cm.

De punten P en Q liggen op de ribbe AD zodanig dat $AP = PQ = QD = 3$ cm. De punten R en S liggen op de ribbe BE zodanig dat $BS = SR = RE = 3$ cm. Deze opgave gaat over het lichaam $PSC.QRF$.
Zie de figuur.

figuur



4p **16** Bereken in cm^3 de inhoud van lichaam $PSC.QRF$.

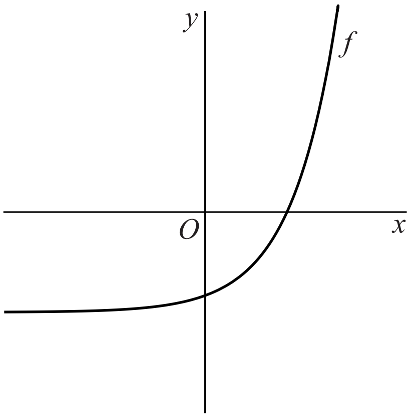
Lichaam $PSC.QRF$ wordt op een hoogte van 2 cm doorsneden met een vlak dat evenwijdig is met het vlak $PQRS$.

5p **17** Teken deze doorsnede op ware grootte. Licht je werkwijze toe.

Exponentiële functie

De functie f is gegeven door $f(x) = 3^{x-1} - 2$. Zie figuur 1.

figuur 1



3p **18** Bereken exact de waarde van x waarvoor geldt: $f(x) = 241$

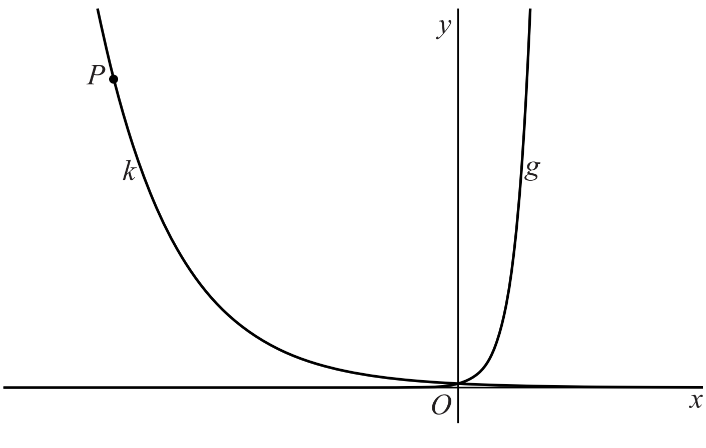
De functie g is gegeven door $g(x) = 3^x$.

Op de grafiek van g worden de volgende transformaties uitgevoerd:
eerst de verschuiving 6 omlaag, gevolgd door de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x-as. Op deze manier ontstaat de grafiek van de functie h.

4p **19** Toon op algebraïsche wijze aan dat h dezelfde functie is als f.

De grafiek van g wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie k. Het punt $P(-20, 81)$ ligt op de grafiek van k. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **20** Bereken exact de waarde van a.