Examen HAVO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

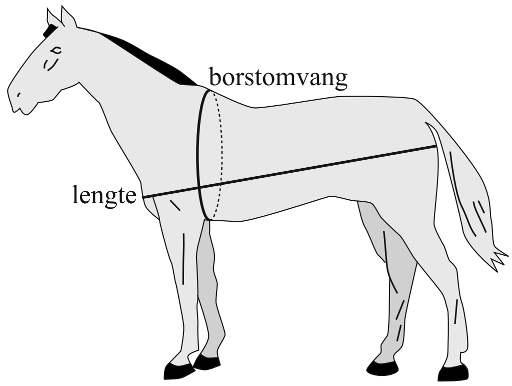
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Het gewicht van een paard

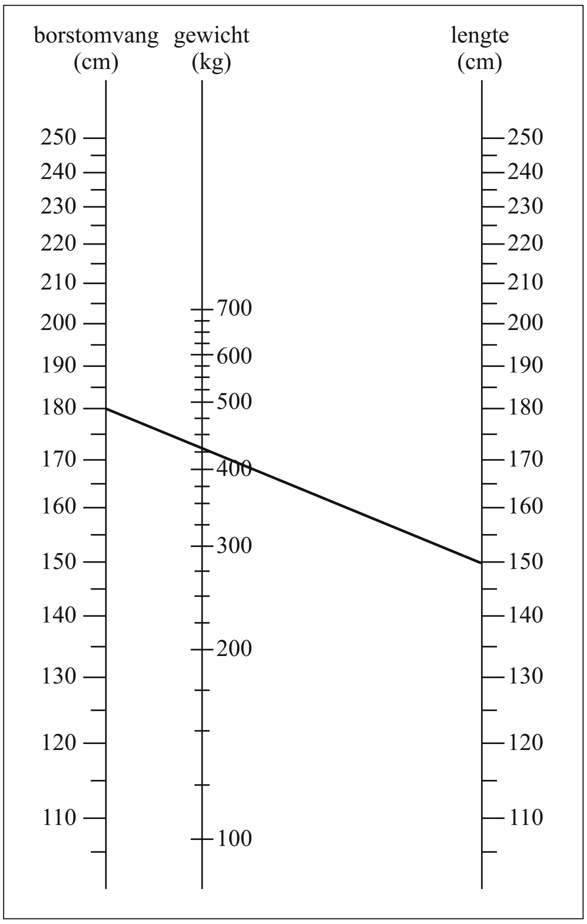
Voor mensen die paarden verzorgen is het belangrijk om te weten hoe zwaar hun paard is. Het gewicht van een paard kan worden geschat met behulp van twee afmetingen: de borstomvang en de lengte.
Zie figuur 1.

figuur 1



Bij een van de methoden om met behulp van deze afmetingen het gewicht te schatten, maak je gebruik van een **nomogram**.
Zie figuur 2.

figuur 2



Het schatten met behulp van het nomogram gaat als volgt. Na meting van de borstomvang en de lengte van een paard worden deze als twee punten op de bijbehorende verticale assen in het nomogram aangegeven. Het snijpunt van de lijn door deze twee punten met de middelste as (gewicht) geeft een schatting van het gewicht van het paard.

In het nomogram zie je bijvoorbeeld dat een borstomvang van 180 cm en een lengte van 150 cm een schatting van het gewicht van het paard geeft van ongeveer 430 kg.

In vraag 1 bekijk je twee paarden met een even grote borstomvang. De lengte van het ene paard is 1,5 keer zo groot als die van het andere paard.

4p **1** Kies een borstomvang en een lengte voor het kleinste paard en onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage of het gewicht van het grootste paard ook 1,5 keer zo groot is als dat van het kleinste paard. Licht je antwoord toe.

Een andere methode om het gewicht van een paard te schatten aan de hand van de borstomvang en de lengte, maakt gebruik van formules.
Twee van zulke formules zijn de formule van Carroll en de formule van Jones:

$G_C = \dfrac{B^2 \cdot L}{11\,900}$ en $G_J = \dfrac{B^{1,78} \cdot L^{0,97}}{3000}$, met $100 < B < 300$ en $100 < L < 200$.

Hierin zijn G_C en G_J het gewicht in kg volgens respectievelijk Carroll en Jones.

B is de borstomvang in cm en L is de lengte in cm.

Voor paarden van hetzelfde ras geldt dat er een vaste verhouding is tussen de borstomvang en de lengte.
Een Belgisch trekpaard bijvoorbeeld is een zwaar gebouwd paard (zie foto 1) waarvoor deze verhouding gelijk is aan 3 : 2.

foto 1

Een bepaald Belgisch trekpaard heeft een lengte van 150 cm. Je kunt het gewicht van dit paard schatten met bovenstaande formules, maar ook met het nomogram. Bij dit paard komt het gewicht volgens het nomogram het best overeen met het gewicht volgens één van beide formules.

5p **2** Welke van de twee formules is dit? Licht je antwoord toe.

De Arabische volbloed is een veel slanker paardenras. Zie foto 2. We gaan ervan uit dat bij dit ras de borstomvang en de lengte aan elkaar gelijk zijn.

foto 2

V is het verschil tussen de schattingen van het gewicht volgens de twee formules:

$V = G_J - G_C$

Bij Arabische volbloeden geldt:

$V = \dfrac{L^{2,75}}{3000} - \dfrac{L^3}{11\,900}$

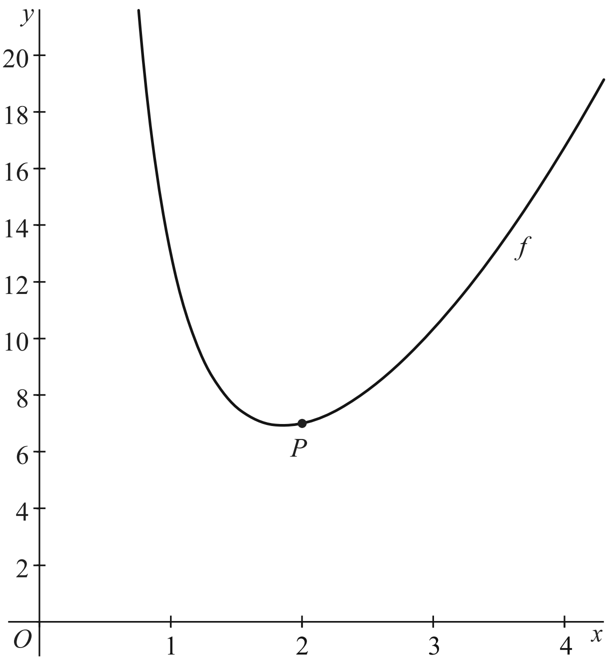
3p **3** Toon dit aan.

3p **4** Onderzoek bij welke lengte van een Arabische volbloed het verschil V maximaal is. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

Grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 + 12x^{-2}$, met $x > 0$.
In onderstaande figuur is de grafiek van f getekend.

figuur



Op de grafiek van f ligt het punt P met coördinaten $(2, 7)$.

4p **5** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in P.

Een horizontale lijn snijdt de grafiek van f in de punten A en B.
De x-coördinaat van A is 1.

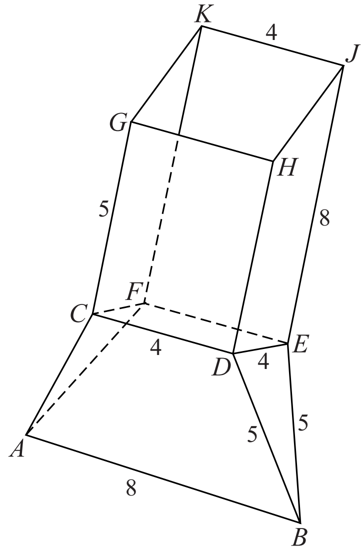
3p **6** Bereken de x-coördinaat van B. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Maatschepje

Bij een bepaald wasmiddel wordt een maatschepje meegeleverd. Zie de foto. Een model van het maatschepje is in figuur 1 getekend. Alle maten zijn in centimeters.

foto

figuur 1



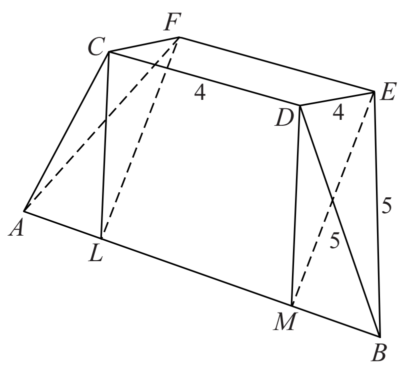
Er geldt:
- $GHJK$ stelt de opening van het schepje voor;
- $AB = 8$ cm;
- $AC = AF = BD = BE = 5$ cm;
- $FEJK$ is een rechthoek met zijden 4 en 8 cm;
- $CDHG$ is een rechthoek met zijden 4 en 5 cm;
- $CDEF$ is een vierkant met zijde 4 cm;
- in $DEJH$ en $CFKG$ zijn de hoeken bij D, E, C en F recht.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met een uitslag van het model van het maatschepje op schaal 1 : 2.

5p **7** Maak de uitslag af en zet bij elk hoekpunt de bijbehorende letter. Licht je werkwijze toe.

Het model van het maatschepje kun je opvatten als een ruimtelijk object dat is opgebouwd uit twee lichamen: $CDEF.GHJK$ en $AB.CDEF$.
In figuur 2 is alleen het lichaam $AB.CDEF$ getekend. Om de inhoud van $AB.CDEF$ te berekenen, kun je het verdelen in een prisma en twee piramides.
De inhoud van $AB.CDEF$ is ongeveer 44 cm^3.

figuur 2



4p **8** Bereken de inhoud van $AB.CDEF$ in cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.

Op vlak $FEJK$ wil je aangeven tot welke hoogte het maatschepje gevuld moet worden om 100 cm^3 waspoeder af te meten. Daarbij wordt het maatschepje zodanig gehouden dat vlak $CDEF$ horizontaal is.

4p **9** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage deze hoogte aan. Licht je werkwijze toe.

Luchtdruk en hoogte

In de luchtvaart spelen hoogte en luchtdruk een belangrijke rol. De luchtdruk kan worden gemeten met een luchtdrukmeter. Uit de waarde van de gemeten luchtdruk kan de hoogte van het vliegtuig worden afgeleid. Luchtdruk wordt gemeten in millibar (mbar) en hoogte in feet (meervoud van foot, 1 foot $\approx$ 30 cm). Hoe hoger je vliegt, hoe lager de luchtdruk is.

foto

Voor het verband tussen de hoogte en de luchtdruk wordt gebruik gemaakt van de volgende vuistregels:

- Op zeeniveau (hoogte 0 foot) is de luchtdruk 1013 millibar;
- Tot een hoogte van 12 000 feet neemt de luchtdruk af met 1 millibar per 30 feet stijging.

Uit deze vuistregels is voor hoogten tot 12 000 feet de volgende lineaire formule af te leiden:

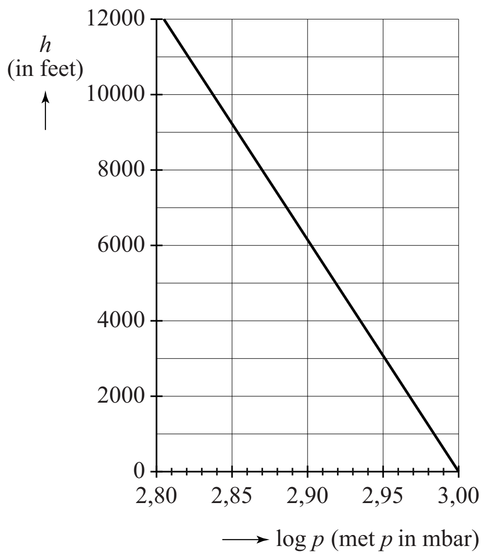
$$h = 30\,390 - 30p$$

Hierin is h de hoogte in feet en p de luchtdruk in millibar.

4p **10** Toon aan dat de formule volgt uit de vuistregels.

Een andere manier om het verband tussen de luchtdruk p en de hoogte h te beschrijven, gaat uit van een logaritmisch verband. In de figuur is het verband tussen $\log p$ en h weergegeven. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 843 millibar gemeten. In de figuur op de uitwerkbijlage kan nu de hoogte worden afgelezen.

4p **11** Lees deze hoogte af en bereken hoeveel deze verschilt van de hoogte die berekend kan worden met behulp van de formule $h = 30\,390 - 30p$.

Het logaritmische verband dat in de figuur is weergegeven, kan beschreven worden met de formule $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log p)$.

Hierin is h weer de hoogte in feet en p de luchtdruk in millibar.

Bij een bepaalde luchtdruk leveren de formules $h = 30\,390 - 30p$ en $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log p)$ dezelfde hoogte op.

3p **12** Bereken bij welke luchtdruk dit het geval is. Geef je antwoord in een geheel aantal millibar.

Een vliegtuig stijgt van 0 foot naar 1000 feet.

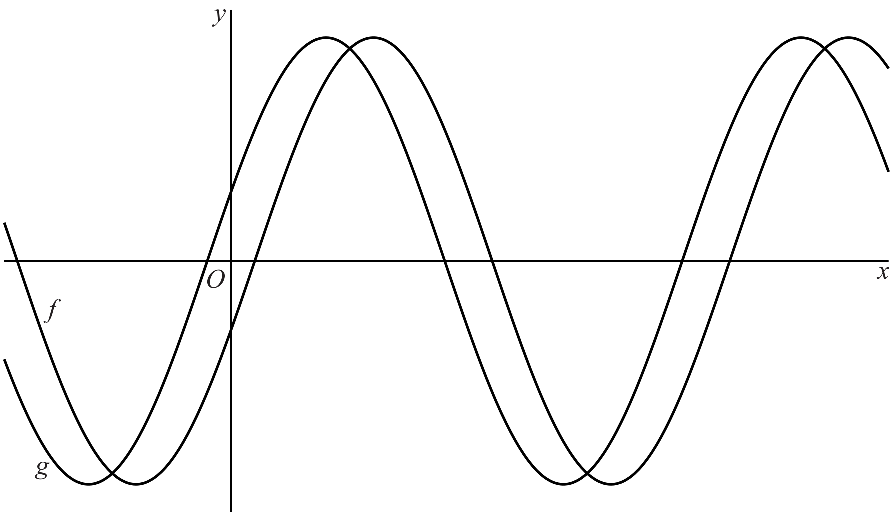
4p **13** Bereken het percentage waarmee de luchtdruk tijdens deze stijging volgens de formule $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log p)$ afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

Sinusoïdes

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi)$ en $g(x) = 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$.

Deze twee functies hebben dezelfde evenwichtsstand en dezelfde periode.
In de figuur zie je (een deel van) de grafieken van de functies f en g.

figuur



Je kunt de grafiek van f horizontaal over een afstand m verschuiven, zodat deze samenvalt met de grafiek van g.

3p **14** Bereken exact een mogelijke waarde van m.

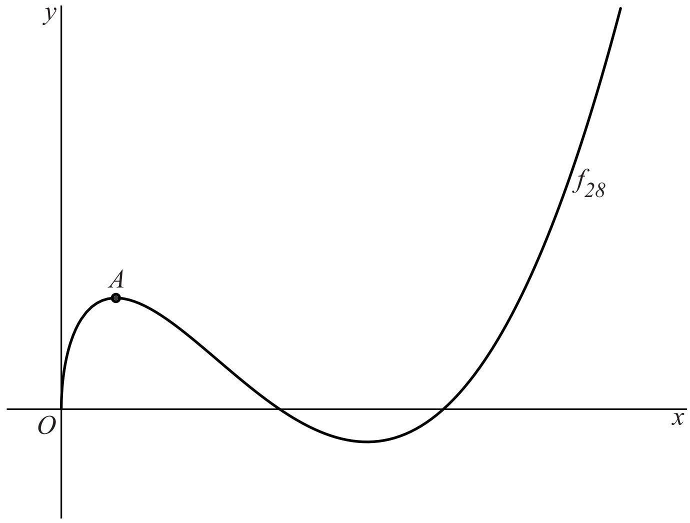
De verschilfunctie v is gegeven door $v(x) = f(x) - g(x)$. Hieruit volgt dat $v(x)$ kan worden geschreven in de vorm $v(x) = a + b\sin\big(c(x - d)\big)$.

5p **15** Bereken mogelijke waarden van a, b, c en d. Rond de gevonden waarden zo nodig af op twee decimalen.

Functies met een wortel

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door $f_c(x) = (x^2 - 11x + c)\sqrt{x}$.
In figuur 1 is de grafiek van de functie $f_{28}(x) = (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x}$ getekend.

figuur 1



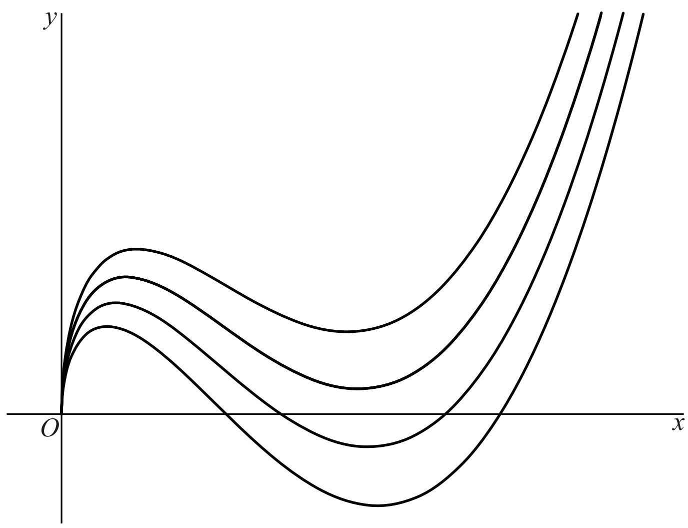
3p **16** Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f_{28} met de x-as.

Op de grafiek van f_{28} ligt punt A. Punt A is een top van de grafiek.
Zie figuur 1.

5p **17** Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van A.

In figuur 2 is voor enkele waarden van c de grafiek van f_c getekend.

figuur 2



4p **18** Bereken exact voor welke waarde van c de grafiek van f_c de x-as raakt.

Kegelkunstwerk

Op de foto is een aantal stalen kunstwerken te zien. Eén zo'n kunstwerk bestaat uit een cirkelvormige bodemplaat met daarop een lichaam L bestaande uit twee gelijke, op elkaar gelaste kegels.
De kegels hebben een tophoek van 90°. Het lichaam kan over de bodemplaat rollen.
We nemen aan dat de bodemplaat een straal heeft van 100 cm.

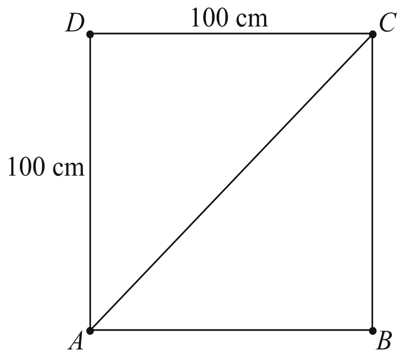
foto

Vanuit een bepaalde kijkrichting heeft het aanzicht van de twee kegels de vorm van een vierkant met zijde 100 cm. In de figuur is dit aanzicht getekend.

De punten B en D zijn de toppen van de kegels. Verder zijn A en C vaste punten op de rand van het grondvlak van de kegels.
In de beginsituatie ligt A recht onder D en ligt C recht boven B.

Afgerond op één decimaal is de straal van het grondvlak van de kegels 70,7 cm.

figuur



3p **19** Bereken exact de straal van het grondvlak van de kegels.

Als het lichaam L gerold wordt, draait het om de as BD. Hierbij rolt de rand van het grondvlak van de kegels precies over de rand van de bodemplaat. Punt B blijft daarbij altijd in het midden van de bodemplaat. De hoogte van punt C varieert. In de beginsituatie bevindt punt C zich in het hoogste punt. Zie de figuur.

L wordt zo ver gerold dat punt C weer de maximale hoogte bereikt. Het lichaam is dan over een hoek van ongeveer 255º over de bodemplaat gedraaid.

3p **20** Bereken deze hoek in één decimaal nauwkeurig.

Vanuit de beginsituatie wordt L gerold. Als het lichaam 360º over de bodemplaat is gedraaid, bevindt punt C zich niet in het hoogste punt.

3p **21** Beredeneer of punt C zich op het moment van het passeren van de 360º omhoog of omlaag beweegt.