# Examen HAVO

# 2011

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

## wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

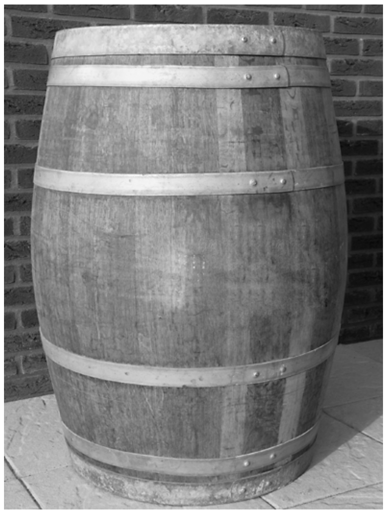
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

HA-1025-a-11-2-o

## Tonregel van Kepler

In het verleden gebruikte men vaak een ton voor het opslaan en vervoeren van goederen. Tonnen worden ook nu nog gebruikt voor bijvoorbeeld de opslag van wijn. Zie de foto.

**foto**



Voor handelaren was het belangrijk om de inhoud van de ton te kunnen bepalen. De astronoom en wiskundige Kepler (1571 - 1613) vond een manier om de inhoud van een ton te benaderen.

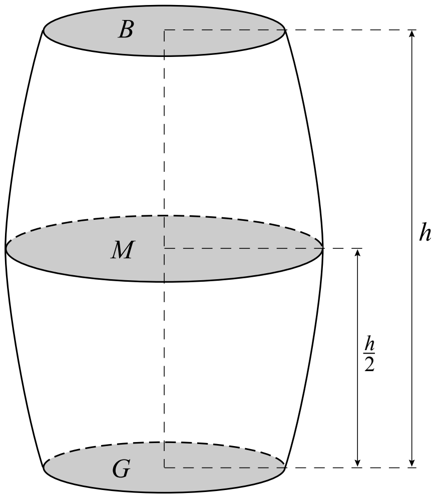
De tonregel van Kepler luidt:

$$I = \tfrac{1}{6} h \cdot (G + 4 \cdot M + B)$$

In deze formule is:
- $I$ de inhoud van de ton;
- $h$ de hoogte van de ton;
- $G$ de oppervlakte van het grondvlak;
- $M$ de oppervlakte van de doorsnede op halve hoogte, evenwijdig aan het grondvlak en het bovenvlak;
- $B$ de oppervlakte van het bovenvlak.

Zie de figuur.

**figuur**




Van de ton op de foto is zowel het grondvlak als het bovenvlak een cirkel met diameter 58 cm. De doorsnede op halve hoogte is een cirkel met omtrek 223 cm. De hoogte van deze ton is 93 cm.

6p **1** Bereken de inhoud van deze ton met de tonregel van Kepler. Rond je antwoord af op een geheel aantal liters.

De tonregel van Kepler geldt niet alleen voor tonnen. Ook voor heel andere soorten lichamen geeft de tonregel een goede benadering van de inhoud. De tonregel van Kepler geeft voor een aantal lichamen zelfs exact de juiste inhoud, bijvoorbeeld voor een kegel, een bol en een piramide.

Een piramide met hoogte 9 heeft als grondvlak een vierkant met zijde 10.

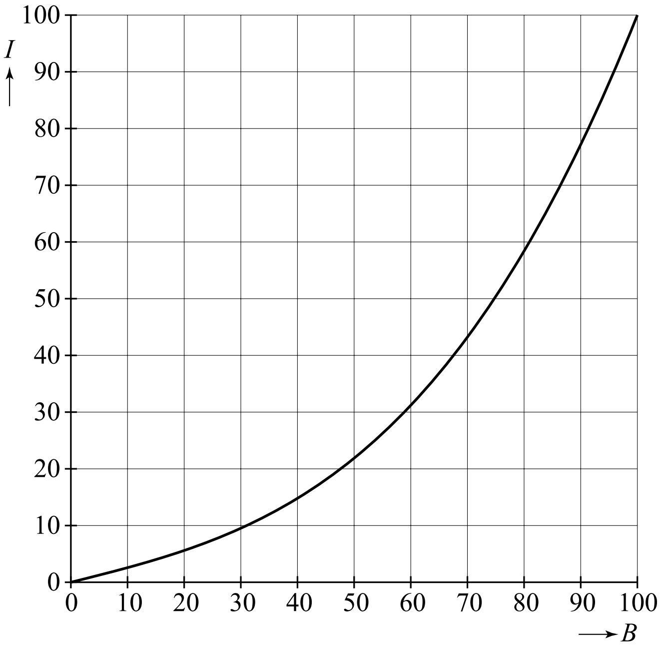
4p **2** Toon aan dat met de tonregel van Kepler voor deze piramide exact de juiste inhoud wordt berekend.

## Inkomensverdeling

Niet iedereen in een land heeft een even hoog inkomen. Om inzicht te krijgen in de verdeling van de inkomens in een land worden **lorenzcurves** gebruikt.

Bij een lorenzcurve wordt de bevolking gerangschikt van lage inkomens naar hoge inkomens. In de figuur staat een voorbeeld van de lorenzcurve van een land. Deze curve is de grafiek van $I$ als functie van $B$. Hierin is $I$ het percentage van het totale inkomen van dit land en $B$ het percentage van de bevolking, waarbij de bevolking van lage inkomens naar hoge inkomens is gerangschikt.

**figuur**




Uit de figuur valt bijvoorbeeld af te lezen dat de minst verdienende 30% van de bevolking van dit land tezamen bijna 10% van het totale inkomen van dit land heeft.
De formule die bij de lorenzcurve in de figuur hoort, is $I = 0,25B + 0,000075B^3$ waarbij $0 \le I \le 100$ en $0 \le B \le 100$.

Als in dit land iedereen een even hoog inkomen zou hebben, dan zou de lorenzcurve het lijnstuk zijn met beginpunt (0, 0) en eindpunt (100, 100).

Het punt op de lorenzcurve waar de raaklijn aan de curve evenwijdig is aan het lijnstuk met beginpunt (0, 0) en eindpunt (100, 100), is de grens tussen een bovengemiddeld en een benedengemiddeld inkomen.

5p **3** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel procent van de bevolking van dit land een bovengemiddeld inkomen heeft.

In het algemeen is de formule die bij een lorenzcurve hoort van de vorm $I = a \cdot B + 100^{1-p} \cdot (1-a) \cdot B^p$. Hierbij is $0 \le a \le 1$ en $p \ge 1$.

De grafiek bij deze formule gaat voor alle waarden van $a$ en $p$ door de punten (0, 0) en (100, 100).

4p **4** Toon dit aan.

Kies $p = 3$. Bij deze keuze is er een waarde van $a$ waarvoor de formule een lorenzcurve geeft van een land waarin de minst verdienende 50% van de bevolking tezamen 17% van het totale inkomen van het land heeft.

3p **5** Bereken deze waarde van $a$.

## Mosselen

Driehoeksmosselen (zie de foto) kunnen een bijdrage leveren aan de vermindering van de hoeveelheid algen in het water. Zij ‘filteren’ het water.
De hoeveelheid gefilterd water in ml/uur noemen we de **filtercapaciteit** van een mossel. Er bestaat een verband tussen de filtercapaciteit van een driehoeksmossel en zijn schelplengte. Hiervoor geldt bij benadering de volgende formule:

**foto**

$$C = \frac{52,7}{1 + 179 \cdot 0,693^{L}}$$

Hierin is $C$ de filtercapaciteit in ml/uur en $L$ is de schelplengte in mm.

Er wordt beweerd dat een driehoeksmossel van 29 mm lang per dag (24 uur) meer dan 1 liter water kan filteren.

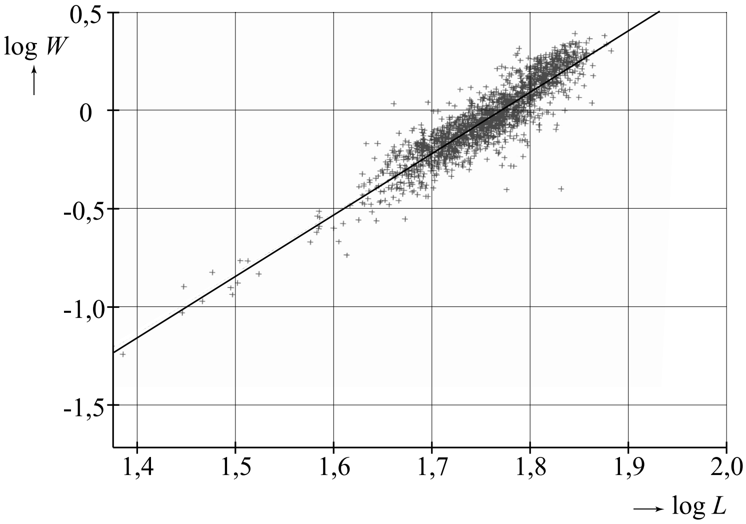
3p **6** Onderzoek of deze bewering overeenstemt met de gegeven formule.

In de praktijk blijkt dat de filtercapaciteit van een driehoeksmossel van 29 mm nauwelijks toeneemt als deze driehoeksmossel verder groeit. Dit is in overeenstemming met de formule.

3p **7** Leg uit hoe uit de formule volgt dat de grafiek die bij deze formule hoort een horizontale asymptoot heeft.

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte $L$ (in mm) en het gewicht van het vlees $W$ (in grammen) van mosselen.
Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2005 zijn in de figuur weergegeven. In de figuur is ook een lijn te zien die een benadering geeft van het verband tussen $\log W$ en $\log L$.

**figuur**



Deze lijn kan gebruikt worden om het gewicht van het vlees van een gewone mossel te schatten als je de schelplengte van die mossel hebt gemeten. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

4p **8** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het gewicht van het vlees van gewone mosselen met een schelplengte van 65 mm. Geef je antwoord in grammen op één decimaal nauwkeurig.

Voor de lijn in de figuur geldt de volgende formule:

$$\log W = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log L$$

4p **9** Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

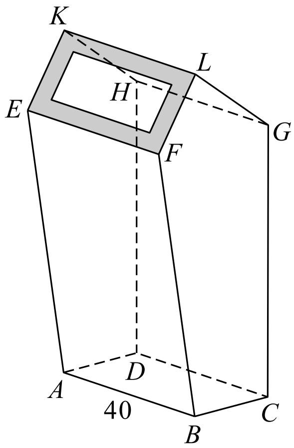
## Vuilnisbak

Op de foto is een metalen vuilnisbak te zien. De stang waar de vuilnisbak aan hangt, laten we in deze opgave buiten beschouwing. In deze opgave worden de rondingen van de vuilnisbak en de dikte van het materiaal verwaarloosd. De breedte van de vuilnisbak is 40 cm.

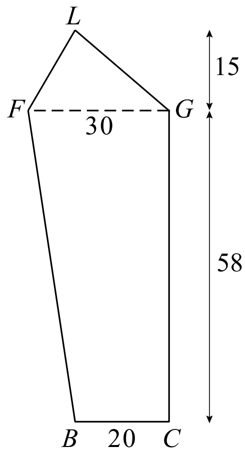
In figuur 1 is de vuilnisbak schematisch weergegeven. In figuur 2 is een zijaanzicht van de vuilnisbak getekend. Hierin ligt punt $L$ recht boven punt $B$ en punt $G$ ligt recht boven punt $C$. $BC$ en $FG$ zijn beide horizontaal. In figuur 1 en figuur 2 is een aantal maten in cm aangegeven.

**foto**

**figuur 1**




**figuur 2**




De vuilnisbak heeft de vorm van een vijfzijdig prisma.

4p **10** Bereken de inhoud van de vuilnisbak.

Aan de bovenkant van de vuilnisbak, in vlak $EFLK$, zit een rechthoekige opening. Om deze opening zit een rand, die in figuur 1 grijs is gemaakt. We gaan er in deze opgave van uit dat deze rand overal 4,5 cm breed is.

6p **11** Teken op schaal 1 : 5 het bovenaanzicht van de vuilnisbak (met opening, zonder stang). Licht je werkwijze toe.

In de vuilnisbak zit een metalen bak die er uitgehaald kan worden om de vuilnisbak te legen. Deze metalen bak is gelijkvormig met het onderste deel van de vuilnisbak: $ABCD.EFGH$. De inhoud van de metalen binnenbak is 10% kleiner dan de inhoud van het deel $ABCD.EFGH$.

3p **12** Bereken de hoogte van de binnenbak. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

## Functies met een wortel

Voor elke waarde van $a$ is de functie $f_a$ gegeven door $f_a(x) = x\sqrt{x+a}$ .

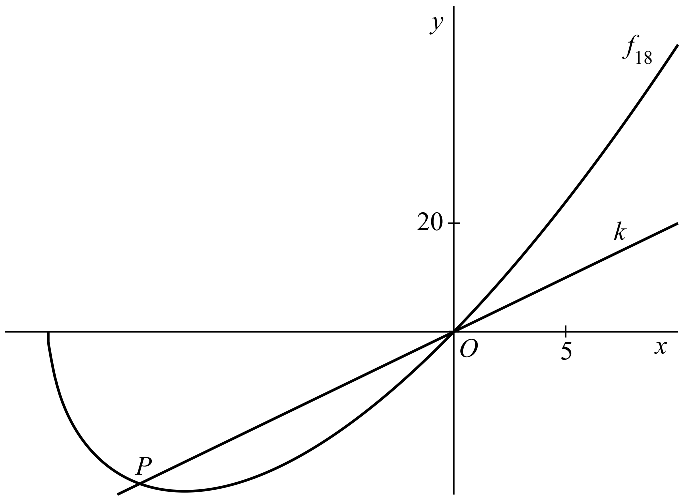
Er is een waarde van $a$ waarvoor het punt $(27, 108)$ op de grafiek van $f_a$ ligt.

4p **13** Bereken exact deze waarde van $a$.

De functie $f_{18}$ is gegeven door $f_{18}(x) = x\sqrt{x+18}$ .

In de figuur zijn de grafiek van $f_{18}$ en de lijn $k$ met vergelijking $y = 2x$ getekend.

**figuur**




De lijn $k$ snijdt de grafiek van $f_{18}$ in twee punten: $O(0, 0)$ en het punt $P$.

6p **14** Bereken exact de lengte van het lijnstuk $OP$.

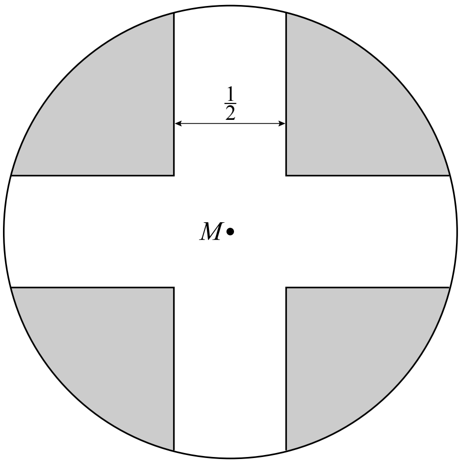
De functie $f_{18}$ heeft een minimum.

4p **15** Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van $x$ dit minimum wordt aangenomen.

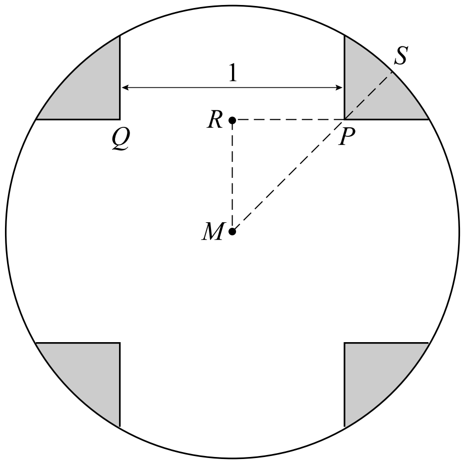
## Kruis in cirkel

Gegeven is een cirkel met middelpunt $M$ en straal 1. In deze cirkel is een kruis met vier even brede en even lange armen aangebracht. In de onderstaande figuren is dit kruis wit en zijn de vier vlakdelen die buiten het kruis en binnen de cirkel liggen grijs gemaakt. In figuur 1 is voor de breedte van de armen $\frac{1}{2}$ genomen en in figuur 2 is deze breedte 1. In figuur 2 is te zien welke punten $P$, $Q$ en $S$ genoemd worden. Het punt $R$ is het midden van $PQ$.

**figuur 1**

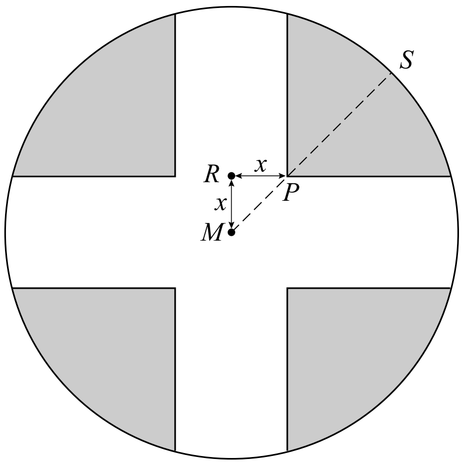



**figuur 2**




De breedte van de armen van het kruis kan variëren. Hierdoor varieert ook de plaats van de punten $P$ en $R$. Als voor de breedte van de armen van het kruis $2x$ genomen wordt, betekent dit dat $MR = RP = x$. Zie figuur 3.

**figuur 3**




Er geldt $PS = 1 - x\sqrt{2}$.

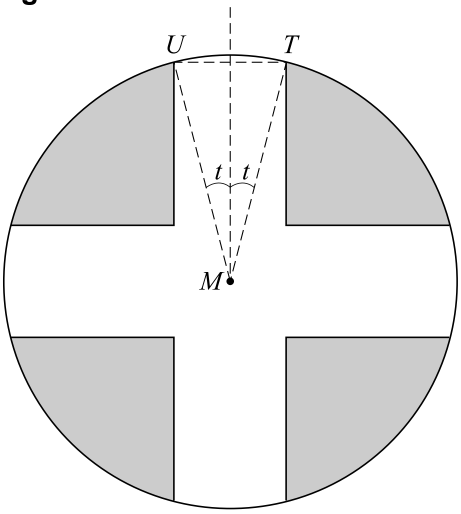
3p **16** Toon dit aan.

Als de breedte van de armen van het kruis toeneemt, komt het punt $P$ dichter bij punt $S$ te liggen. Er is een waarde van $x$ waarvoor geldt $PS = 2 \cdot MP$.

3p **17** Bereken exact deze waarde van $x$.

In figuur 4 is te zien welke punten $U$ en $T$ genoemd worden. De breedte van de armen van het kruis kan ook veranderen door hoek $UMT$ in grootte te variëren. De grootte van de helft van deze hoek in radialen noemen we $t$.

**figuur 4**

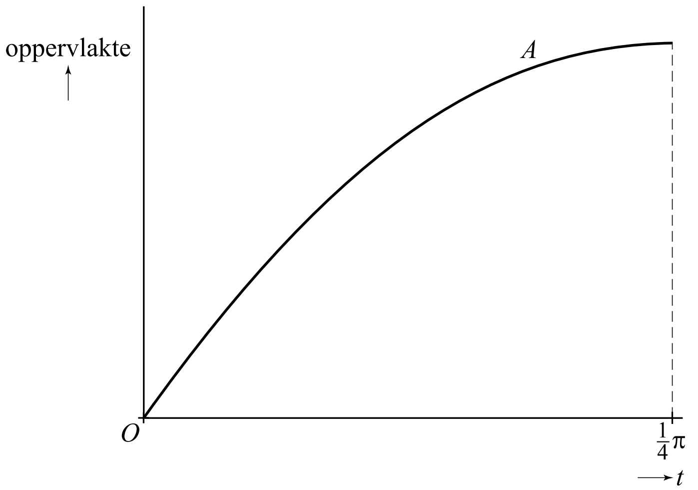



Als $t$ verandert, dan verandert de oppervlakte $A$ van het kruis ook. Er geldt:

$$A(t) = 4t + 2\sin(2t) + 2\cos(2t) - 2 \text{ met } 0 \le t \le \tfrac{1}{4}\pi$$

In figuur 5 is de grafiek van $A$ geschetst. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

**figuur 5**




De totale oppervlakte van de vier grijze delen hangt eveneens van $t$ af.

4p **18** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek die hoort bij de totale oppervlakte van de vier grijze delen. Licht je werkwijze toe.

De helling van de grafiek van $A$ neemt af van 8 bij $t = 0$ tot 0 bij $t = \frac{1}{4}\pi$.

5p **19** Onderzoek met behulp van differentiëren of de helling van de grafiek van $A$ halverwege het interval $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ gehalveerd is.