# Examen HAVO

# 2011

tijdvak 1
donderdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

## wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Overlevingstijd

Als iemand in koud water terecht komt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 ºC ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 ºC wordt de **overlevingstijd** genoemd.

Bij de eerste drie vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. Voor deze persoon geldt de volgende formule:

$$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T} \qquad \text{met } R > 0 \text{ en } T \geq 5,0$$

Hierin is $R$ de overlevingstijd in minuten en $T$ de watertemperatuur in ºC.

Bij een watertemperatuur van 20 ºC is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 ºC.

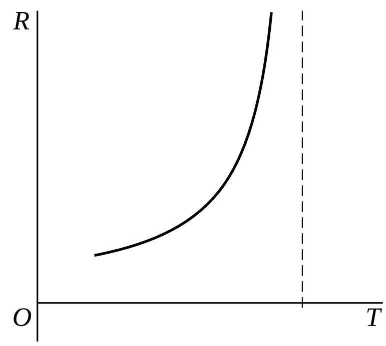
3p **1** Bereken hoeveel keer zo groot.

5p **2** Bereken op algebraïsche wijze de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

In de figuur is de grafiek van $R$ als functie van $T$ geschetst. De grafiek heeft een verticale asymptoot.

3p **3** Bereken de waarde van $T$ die bij de verticale asymptoot hoort **en** leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

**figuur**




De overlevingstijd van personen die te water raken, is niet alleen afhankelijk van de watertemperatuur. De kleding die een persoon draagt, is ook van invloed op de overlevingstijd.

In de tabel staan watertemperaturen met bijbehorende overlevingstijden voor personen in zwemkleding.

**tabel**

| watertemperatuur $T$ in ºC | 5,0 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| overlevingstijd $Z$ in uren | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 |

We gaan voor $5,0 \leq T \leq 20$ uit van een exponentieel verband tussen $T$ en $Z$.

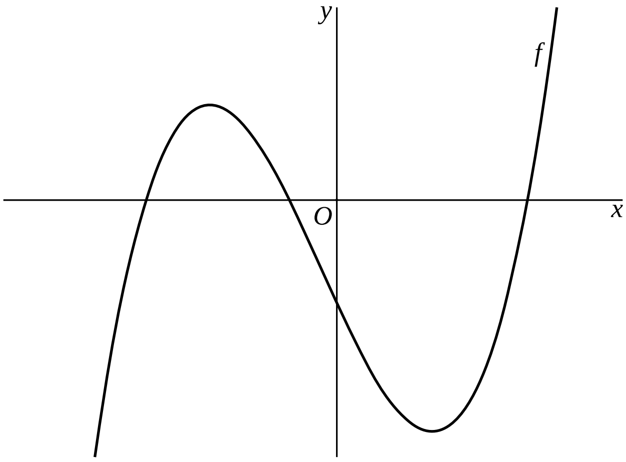
Iemand ligt in zwemkleding in water van 17 ºC.

3p **4** Bereken op algebraïsche wijze zijn overlevingstijd. Geef je antwoord in uren. Rond hierbij af op één decimaal.

## Polynoom

De functie $f$ is gegeven door $f(x) = (x+1)(x^2 - 16)$. Van een van de twee toppen van de grafiek van $f$ is de $x$-coördinaat positief. Zie figuur 1.

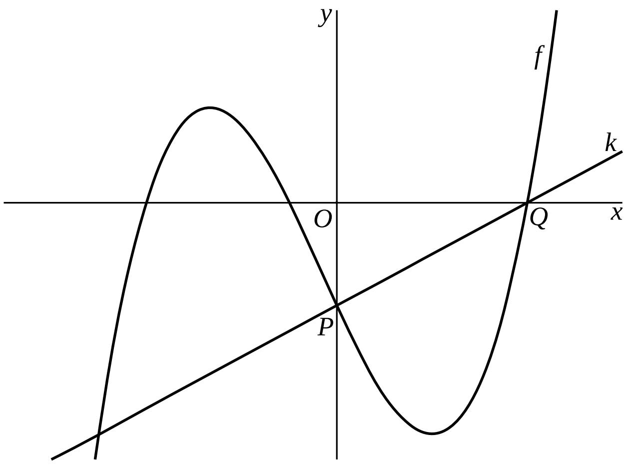
**figuur 1**




5p **5** Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van deze top.

Punt $P$ is het snijpunt van de grafiek van $f$ met de $y$-as. Punt $Q$ is het snijpunt van de grafiek van $f$ met de positieve $x$-as.
Lijn $k$ gaat door de punten $P$ en $Q$. Zie figuur 2.

**figuur 2**

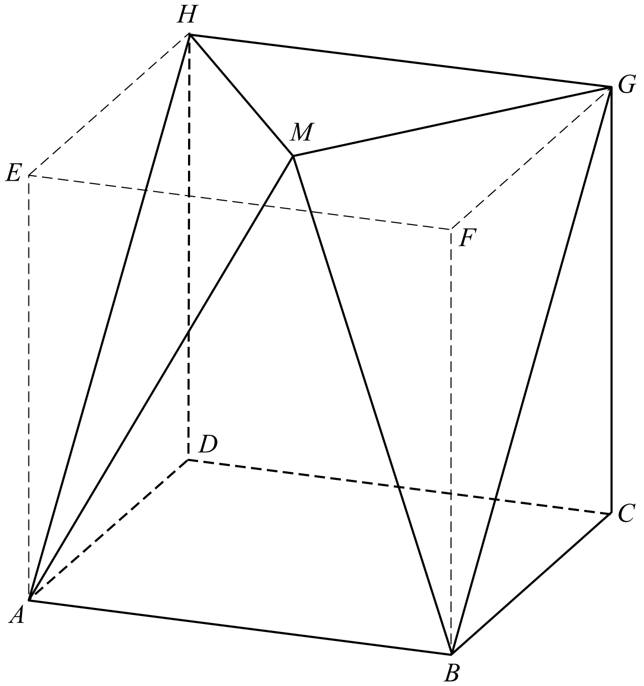



5p **6** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van $k$.

## Lichaam in kubus

Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6,0 cm. Binnen deze kubus bevindt zich het lichaam $ABCD.MGH$. Het punt $M$ ligt in het bovenvlak van de kubus. De afstand van $M$ tot $GH$ is 4,0 cm en $HM = GM$. Zie figuur 1.

**figuur 1**




3p **7** Teken op ware grootte het bovenaanzicht van het lichaam $ABCD.MGH$. Zet de letters bij de hoekpunten.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met een uitslag van het lichaam $ABCD.MGH$ op schaal 1:2.

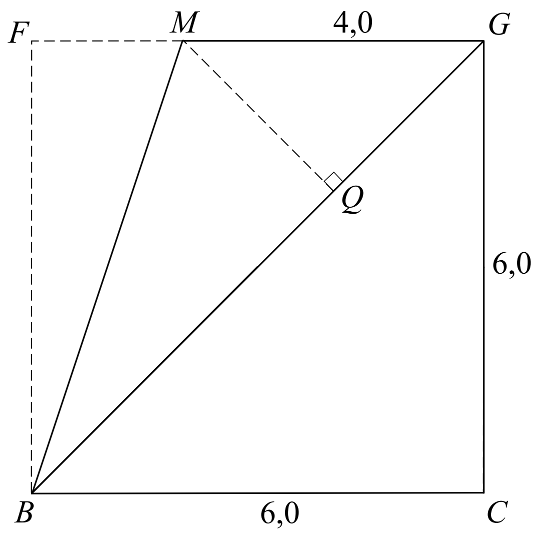
7p **8** Maak de uitslag af. Zet de letters bij de hoekpunten en licht je werkwijze toe.

Het lichaam $ABCD.MGH$ kan worden gesplitst in twee delen: de piramide $ABGH.M$ en het prisma $ADH.BCG$.

De rechthoek $ABGH$ is het grondvlak van de piramide $ABGH.M$. De hoogte van deze piramide is gelijk aan de lengte van het lijnstuk $MQ$ in het zijaanzicht van het lichaam en de kubus in figuur 2.

6p **9** Bereken op algebraïsche wijze de inhoud van het lichaam $ABCD.MGH$.

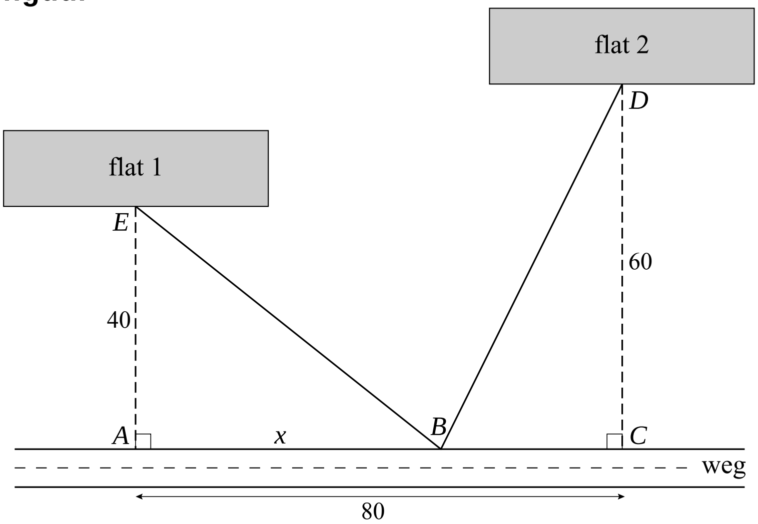
**figuur 2**



## Bushalte

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt $E$) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt $D$) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt $B$) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt $A$ is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt $C$ is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt $A$ en punt $C$ is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend.

**figuur**




De lengte van het voetpad tussen de bushalte en de ingang van flat 1 in meters wordt gegeven door de formule $BE = \sqrt{x^2 + 1600}$ en de lengte van het voetpad tussen de bushalte en flat 2 in meters wordt gegeven door de formule $BD = \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$. Hierin is $x$ de afstand tussen punt $A$ en de bushalte $B$ in meters.

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

4p **10** Bereken op algebraïsche wijze de waarde van $x$ in deze situatie.

De totale lengte van de twee voetpaden $L$ in meters wordt gegeven door de formule:

$$L = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$$

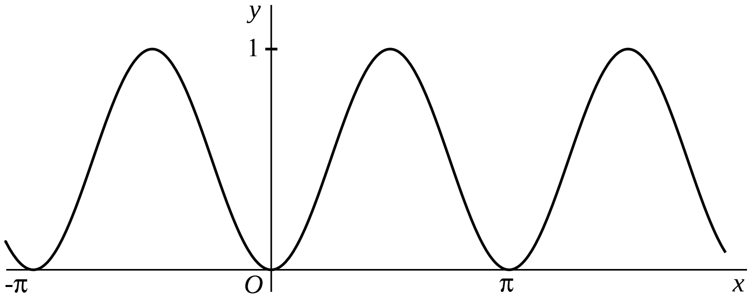
Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is. Hierdoor hoeft er minder dan 132 meter voetpad aangelegd te worden.

6p **11** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter minder.

## Sinusoïde

Van een sinusoïde zijn de punten (0, 0) en ($\frac{1}{2}\pi$, 1) twee opeenvolgende toppen. Zie de figuur.

**figuur**




Deze sinusoïde kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \cdot \sin(c(x - d))$.

4p **12** Bepaal mogelijke waarden van $a$, $b$, $c$ en $d$.

Een andere formule die deze sinusoïde beschrijft, is $y = (\sin x)^2$.

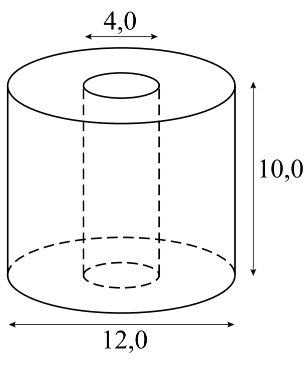
4p **13** Bereken met behulp van deze formule op algebraïsche wijze de helling van de raaklijn aan de sinusoïde in het punt met $x$-coördinaat $\frac{1}{4}\pi$.

## Toiletpapier

Toiletpapier zit vaak op een rol. In deze opgave wordt een wiskundig model van een rol toiletpapier bekeken. In dit model is een rol toiletpapier een cilinder waaruit in het midden een cilinder is weggelaten. In figuur 1 is het model van een volle rol toiletpapier te zien. Deze rol heeft een buitendiameter van 12,0 cm, een binnendiameter van 4,0 cm en een hoogte van 10,0 cm.

**foto 1**

**figuur 1**




Het volume van het toiletpapier op de rol in figuur 1 is $320\pi$ cm$^3$.

3p **14** Toon dit aan.

Iemand beweert dat de helft van het toiletpapier gebruikt is, wanneer de buitendiameter 8,0 cm is (midden tussen 4,0 cm en 12,0 cm). Dit is onjuist.

4p **15** Bereken de werkelijke buitendiameter van de toiletrol als de helft van het toiletpapier gebruikt is.

De rol toiletpapier bestaat uit een aantal velletjes. De buitendiameter van de rol toiletpapier hangt af van het aantal velletjes dat nog op de rol zit. Voor de rol waarvan het model in figuur 1 te zien is, geldt de formule:

$$d = 2 \cdot \sqrt{0{,}16v + 4{,}0}$$

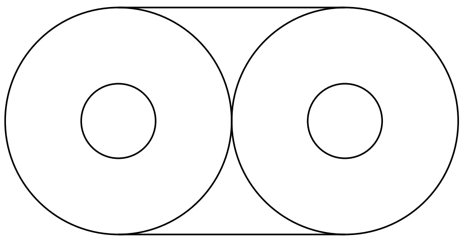
Hierin is $d$ de buitendiameter in cm en $v$ het aantal velletjes toiletpapier dat nog op de rol zit.

Een volle rol heeft een buitendiameter van 12,0 cm. Een velletje toiletpapier is 13,6 cm lang.

4p **16** Bereken hoeveel meter papier er op een volle rol zit.

**foto 2**


**figuur 2**



Toiletpapier wordt vaak per vier rollen verpakt in plastic zoals te zien is op foto 2. Ga ervan uit dat het plastic nergens overlapt. In figuur 2 is een schematisch bovenaanzicht te zien met de plastic verpakking van vier rollen die elk de afmetingen van het model in figuur 1 hebben.

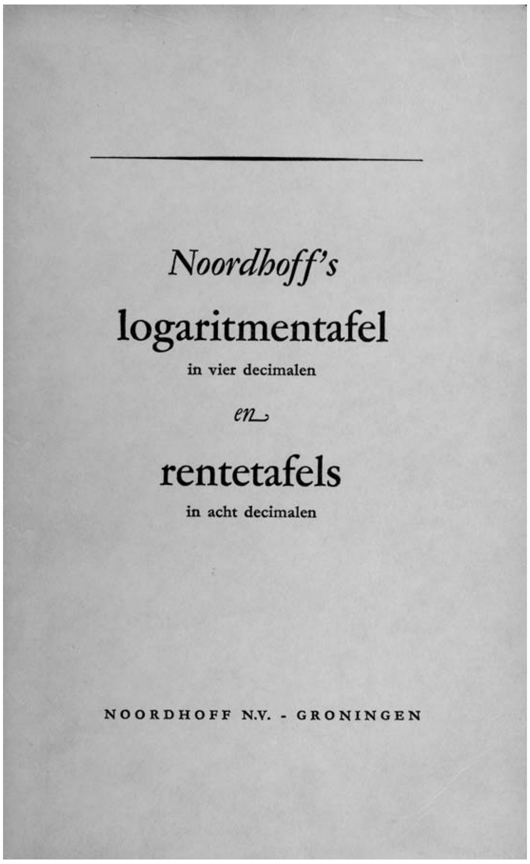
4p **17** Bereken de oppervlakte van het plastic dat nodig is om de vier rollen op deze manier te verpakken. Geef je antwoord in $cm^2$ nauwkeurig.

**Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.**

## Logaritmentafel

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de rekenmachine. 50 jaar geleden waren er nauwelijks rekenmachines. De middelbare scholieren van toen gebruikten tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen. Zie de foto. In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje.

**foto**




**tabel**

| $n$ | $\log n$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,3010 |
| 3 | 0,4771 |
| 4 | 0,6021 |
| 5 | 0,6990 |
| 6 | 0,7782 |
| 7 | 0,8451 |
| 8 | 0,9031 |
| 9 | 0,9542 |
| 10 | 1 |
| 100 | 2 |
| 1000 | 3 |

Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Hierbij kan, zonder de log-toets van de (grafische) rekenmachine te gebruiken, een benadering van het antwoord gevonden worden.

Voorbeeld: $\log 1\frac{1}{2} = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0,4771 - 0,3010 \approx 0,176$.

3p **18** Bereken $\log 24$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine.

Gegeven is de vergelijking $7^x = 25$.

4p **19** Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine. Rond je antwoord af op drie decimalen.