Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

Wiskunde A (oude stijl)

20 02

Tijdvak 2
Woensdag 19 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 5 en 11 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

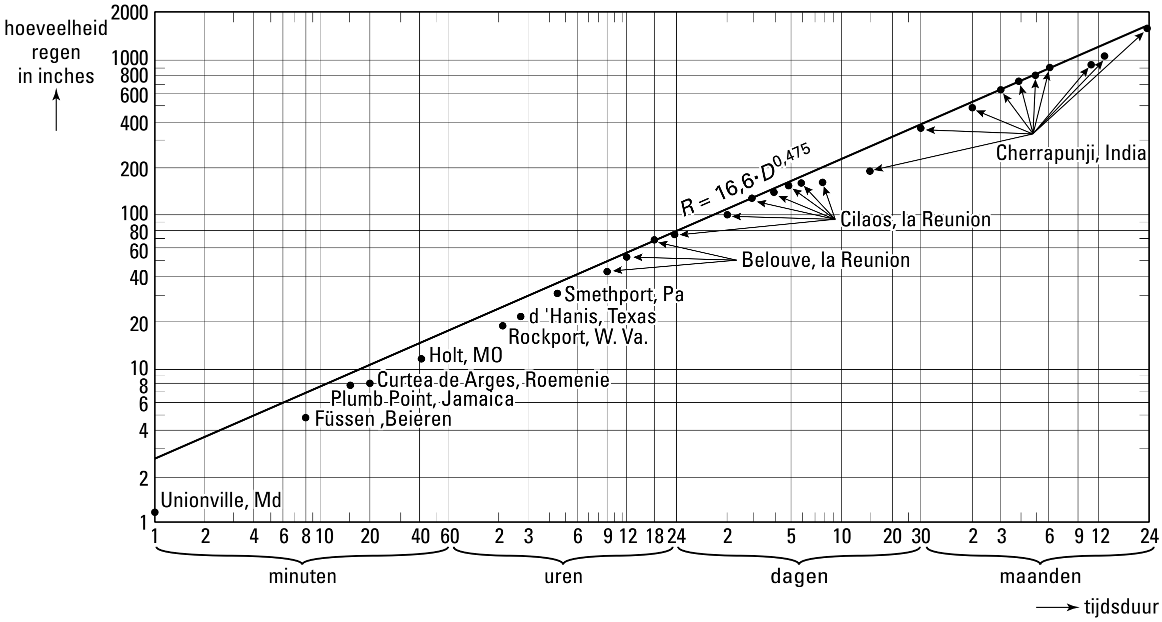
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Wereldrecords nattigheid

Wie loopt de 5000 meter in de kortste tijd? Die atleet mag zich wereldrecordhouder op de 5000 meter noemen. Op welke plaats op aarde valt in een regenbui van 7 uur het meeste water? Die plaats mag zich wereldrecordhouder nattigheid over 7 uur noemen.

De hoeveelheid water van een regenbui wordt gemeten in inches (1 inch is 2,54 cm). Het regenwater wordt opgevangen in een regenmeter. De hoogte van het water in de regenmeter geeft aan hoeveel regen er gevallen is.
Een aantal wereldrecords nattigheid zijn met punten in figuur 1 weergegeven. Figuur 1 staat ook op de bijlage. Op de horizontale as staat hoe lang de bui geduurd heeft en op de verticale as staat de hoeveelheid regen. Men heeft langs beide assen een bijzondere schaalverdeling gekozen.

figuur 1



Plumb Point in Jamaica is een van de wereldrecordhouders.

3p **1** ☐ Hoe lang duurde die regenbui en hoeveel centimeter regen kwam er naar beneden?

De grafiek komt uit een artikel over regenbuien. De schrijver van het artikel heeft een lijn getrokken waar geen enkele van deze wereldrecords boven ligt. Het lijkt alsof heviger regenval dan op deze lijn niet mogelijk is.

Over de punten op deze lijn beweert de schrijver: „De hoeveelheid regen van 100-minutenbuien is ongeveer drie keer zo groot als de hoeveelheid regen van 10-minutenbuien. De hoeveelheid regen van 1000-minutenbuien is weer ongeveer drie keer zo groot als van 100-minutenbuien."

4p **2** ☐ Onderzoek of deze beweringen juist zijn.

De schrijver heeft een formule voor de lijn opgesteld:

$R = 16{,}6 \cdot D^{0{,}475}$

Hierin is R de hoeveelheid regen in inches en D de duur van de bui.

4p **3** ☐ Onderzoek welke eenheid D in de formule heeft: minuten, uren, dagen of maanden.

In het voorgaande hebben we bij verschillende regenbuien gelet op de hoeveelheid regen en de bijbehorende tijd. In verband met overstromingsproblemen (van riolen en dergelijke) is het van belang om ook te letten op de hoeveelheid regen per minuut. Dit wordt de *intensiteit I* van een bui genoemd. In formulevorm:

$$I = \frac{\textit{hoeveelheid regen}}{\textit{duur van de bui}}$$

Hierbij is de hoeveelheid regen in inches en de duur van de bui in minuten.

2p **4** ☐ Bereken de intensiteit van de regenbui van Füssen in figuur 1.

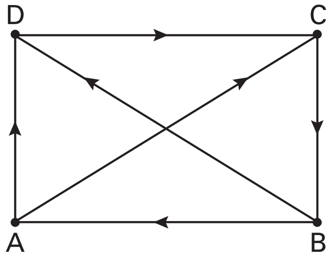
Als de intensiteit I te hoog is, kunnen er problemen ontstaan met de afvoer van het water.
Een intensiteit van 0,1 blijkt in de praktijk al voor grote problemen te kunnen zorgen.
Punten met gelijke intensiteit liggen in figuur 1 op een rechte lijn.
In de figuur op de bijlage kan de lijn getekend worden die hoort bij $I = 0{,}1$.

5p **5** ☐ Onderzoek hiermee welke van de buien een intensiteit kleiner dan 0,1 hadden.

Dominantie

De pikorde is de volgorde waarin kippen elkaar toestaan om voer te pikken uit de voerbak. Het is niet zo eenvoudig om die volgorde vast te stellen.
We bekijken als voorbeeld de onderstaande graaf. In deze graaf zijn de zogenaamde dominanties weergegeven voor vier kippen die we A, B, C en D genoemd hebben.

figuur 2



De pijl die van A naar C loopt, betekent dat A dominant is over C. Hiermee bedoelen we dat A machtiger is dan C, zodat A eerst voedsel mag pikken en daarna C, als alleen deze twee kippen bij de voerbak zouden staan.

We kunnen de informatie uit deze graaf in een matrix weergeven. (Hieronder op deze pagina zie je een voorbeeld van zo'n matrix, maar dan met andere afmetingen.)
Bij deze matrix zetten we boven de kolommen A, B, C en D en daarboven schrijven we 'is dominant'. Links van de matrix schrijven we 'over' en weer de letters A, B, C en D.
In de kolom onder een kip betekent een '1' dat deze kip dominant is over de kip van die rij. Als dat niet zo is, dan staat er een '0'.

5p **6** ☐ Maak een 4×4 matrix met de dominanties van de vier kippen uit figuur 2.

Met behulp van deze matrix is te bepalen welke kip de meest dominante, de machtigste is. Dat gebeurt op de volgende manier.
Je telt de enen in de kolom van elke kip. De meest dominante kip heeft het hoogste aantal enen. Zijn er bijvoorbeeld twee kippen met dat hoogste aantal enen, dan zal één van deze twee de ander domineren. Die kip is dan de meest dominante.

Op deze manier proberen wij de volgorde van dominantie tussen mensen te bepalen. In onderstaande matrix M zijn de dominanties tussen vijf mensen weergegeven.

matrix

$$\begin{array}{cc} & \textit{is dominant} \\ & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \textit{over} \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

4p **7** ☐ Bepaal met behulp van bovenstaande methode de volgorde van dominantie voor deze vijf mensen. Licht je werkwijze toe.

Er zijn ook andere methodes om de volgorde van dominantie te bepalen als twee of meer mensen hetzelfde aantal enen hebben. Een daarvan is de methode van de indirecte dominantie.

In de matrix M is B niet dominant over C, maar toch zal B invloed hebben op C. Kijk maar:
B is dominant over A en over D. En A en D zijn dominant over C.
Je kunt zeggen dat B indirect (via A en D) dominant is over C.

Om die indirecte dominantie te bepalen, berekenen we de matrix $M \times M = M^2$.
M^2 geeft informatie over de tweestapsdominantie, de indirecte dominantie.

5p **8** ☐ Bereken de matrix M^2.

Indirecte dominantie is minder belangrijk dan directe dominantie. Laten we zeggen dat indirecte dominantie half zo sterk meetelt als directe dominantie.
We kunnen dan de volgorde van dominantie met behulp van een matrix R vaststellen.
Matrix R berekenen we op de volgende manier.

$$R = (\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,) \times M + (\,\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\,) \times M^2$$

6p **9** ☐ Bereken matrix R en onderzoek of deze methode dezelfde volgorde van dominantie oplevert als de methode bij vraag 7.

Brandstofverbruik

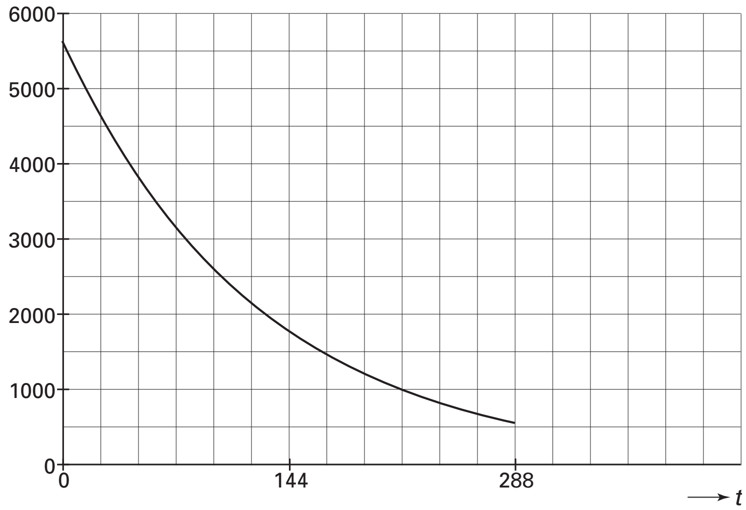
In de jaren tachtig heeft men in de Verenigde Staten een vliegtuigje gebouwd dat zonder een tussenstop om de wereld kon vliegen.
Het speciaal geconstrueerde vliegtuigje vloog met een constante snelheid in 288 uur rond de aarde.
Vóór de vlucht van het vliegtuigje had men een aantal wiskundige modellen opgesteld voor de brandstofvoorraad B. Die hangt natuurlijk af van het aantal gevlogen uren t.
Bij elk van die modellen ging men ervan uit dat het vliegtuigje met 5600 liter brandstof vertrekt en dat er na 288 uur vliegen nog 10% van deze totale brandstofvoorraad aanwezig is voor onvoorziene omstandigheden.

Model 1
Bij dit model ging men ervan uit dat het brandstofverbruik (in liters per uur) constant is.

4p **10** ☐ Stel voor dit model een formule op voor de brandstofvoorraad B (in liters) uitgedrukt in het aantal vlieguren t.

Model 2
Het gewicht van het vliegtuigje (zonder brandstof) is veel lager dan het gewicht van de 5600 liter brandstof. Tijdens de vlucht wordt het gewicht van 'vliegtuig plus brandstof' steeds kleiner. Het vliegtuigje zal daarom tijdens de vlucht steeds minder brandstof gaan verbruiken. Het tweede model houdt daar rekening mee.
In figuur 3 zie je de grafiek die hoort bij dit model. Deze grafiek staat ook op de bijlage.

figuur 3



Het brandstofverbruik is in de eerste 24 uur van de vlucht een aantal maal zo groot als het verbruik tijdens de laatste 24 uur. Met behulp van de grafiek op de bijlage kun je schatten hoeveel maal zo groot.

5p **11** ☐ Geef zo'n schatting. Licht je werkwijze toe.

Bij dit model is sprake van een exponentiële afname van de brandstofvoorraad. De brandstofvoorraad nam in 288 uur af van 5600 tot 560 liter.

5p **12** ☐ Stel daarmee voor dit model een formule op voor de brandstofvoorraad B uitgedrukt in t. Licht je werkwijze toe.

Strafschoppen

In het verleden is gebleken dat het Nederlands voetbalelftal niet goed is in het nemen van strafschoppen.
Zo verloor Nederland van Italië bij het nemen van strafschoppen na de verlenging in de halve finale tijdens het Europees Kampioenschap in 2000. Dit gebeurde ook tegen Brazilië in de halve finale tijdens het Wereldkampioenschap in 1998.

Dit was de aanleiding voor een onderzoeker om eens na te gaan hoe strafschoppen worden genomen en hoeveel er een doelpunt opleveren.
Hij heeft daartoe alle strafschoppenseries van de Europese Kampioenschappen en Wereldkampioenschappen sinds 1988 bestudeerd.

In zijn onderzoek verdeelt hij het doel in zes vakken, bekeken vanuit het gezichtspunt van de speler die de strafschop neemt.
In figuur 4 staat voor elk van de zes vakken hoeveel procent van de strafschoppen op dat vak gericht wordt.

figuur 4 **Per vak het percentage strafschoppen gericht op dat vak**

	links	midden	rechts
boven (hoog)	21%	13%	14%
onder (laag)	24%	10%	18%

4p **13** ☐ Toon aan dat 29% van de hoog gerichte strafschoppen wordt gericht op rechtsboven.

In figuur 5 staat voor elk vak de kans dat een op dat vak gerichte strafschop een doelpunt oplevert.
Zo kun je aflezen dat iemand die richt op rechtsboven een kans heeft van 0,94 om een doelpunt te maken.
In deze opgave gelden deze kansen voor iedere strafschopnemer, ongeacht wie de doelman is en ongeacht andere omstandigheden.

figuur 5 **Per vak de kans op een doelpunt, als op dat vak gericht is**

	links	midden	rechts
boven (hoog)	0,91	0,81	0,94
onder (laag)	0,88	0,16	0,75

5p **14** ☐ Bereken hoeveel procent van de laag gerichte strafschoppen een doelpunt oplevert.

Op een training van het Nederlands elftal oefent een speler strafschoppen. Hij richt tien strafschoppen achter elkaar op rechtsboven.
4p **15** ☐ Bereken de kans dat deze speler niet alle tien keer een doelpunt maakt.

Bij de strafschoppenserie tegen Italië in de halve finale van het Europees Kampioenschap in 2000 heeft Nederland vier strafschoppen genomen.
De eerste speler, Frank de Boer, richtte op rechtsonder. Daarna richtte Jaap Stam op middenboven. Vervolgens richtten Patrick Kluivert en Paul Bosvelt op linksonder.
6p **16** ☐ Bereken met behulp van figuur 5 de kans dat bij een op deze manier genomen strafschoppenserie alleen de derde strafschop een doelpunt oplevert.

Licht in de kas

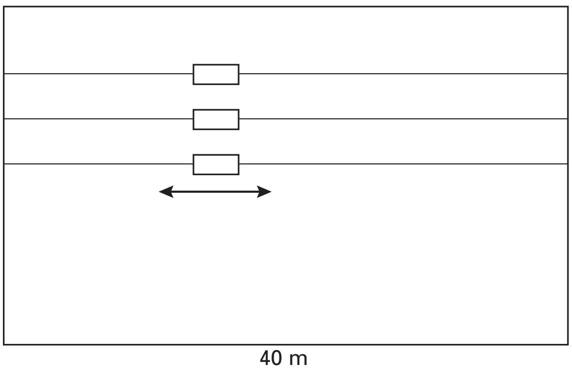
Veel tuinbouwkassen in Nederland worden 's nachts verlicht om de groei van de planten te bevorderen. Om deze kassen te verlichten worden lampen van 600 Watt gebruikt. Per hectare (10 000 m^2) zijn 1000 van die lampen nodig.
Onlangs heeft een tuinder een nieuw systeem van verlichten ontwikkeld. Bij dit systeem zitten de lampen niet meer vast, maar glijden ze langs rails boven in de kas heen en weer. De planten worden verlicht zolang de lamp erboven is, daarna staan ze weer in het donker. Met dit systeem heb je per hectare maar 60 lampen nodig, terwijl de groeibevordering nauwelijks minder is dan bij de continue verlichting.

Elektriciteit betaal je per kilowattuur (kWh). 1 kWh is de hoeveelheid elektriciteit die een lamp van 1000 Watt gebruikt als hij één uur brandt. Een lamp van 600 Watt gebruikt in één uur 0,6 kWh.
Tuinders betalen 4,9 eurocent per kWh.
De lampen branden gemiddeld acht uur per etmaal (1 etmaal = 24 uur).
We houden in deze opgave geen rekening met de extra kosten voor het laten bewegen van de lampen.

4p **17** ☐ Bereken de jaarlijkse besparing aan elektriciteitskosten voor één hectare met dit nieuwe systeem.

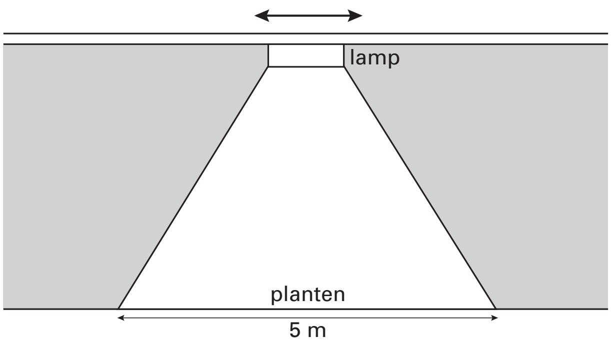
Een andere tuinder is nieuwsgierig geworden en gaat het systeem in een van zijn kleinere kassen uitproberen. Hij heeft een kas met een lengte van 40 m.
In figuur 6 staat schematisch een deel van het bovenaanzicht van die kas met bewegende lampen. De lampen bewegen met een snelheid van 25 meter per uur.

figuur 6



In figuur 7 staat een zijaanzicht van één van de lampen. De lamp verlicht de planten over een lengte van 5 meter.

figuur 7



We gaan ervan uit dat de lampen alle punten in de kas even lang beschijnen.
In de maand oktober branden de lampen acht uur per nacht.

4p **18** ☐ Hoe lang wordt een punt in het midden van de kas verlicht tijdens een nacht in oktober? Licht je antwoord toe.

In een grote kas bewegen de lampen naast elkaar. Omdat alle lampen een eigen motortje hebben om zich voort te bewegen, kunnen er kleine afwijkingen zitten in de oversteektijden van de lampen. De tijd om de overkant van de kas te bereiken is normaal verdeeld met een gemiddelde van 96 minuten en een standaardafwijking van 50 seconden.

De tuinder wil het liefst dat de lampen naast elkaar heen en weer over de lengte van de kas blijven gaan. Dat is beter voor de planten.
Om ervoor te zorgen dat alle lampen op hetzelfde moment weer teruggaan, worden ze allemaal voorzien van een klok. Die klok zorgt ervoor dat de lampen precies twee minuten na de gemiddelde oversteektijd aan de terugtocht beginnen. Lampen die iets langer over de oversteek hebben gedaan, staan dus iets korter stil.
Wanneer een lamp meer dan twee minuten langer voor de oversteek nodig heeft, hoeft die niet te wachten. De lamp is te laat en gaat direct terug.

Van de lampen die op tijd vertrekken, komt een deel te laat aan de overkant en gaat dus direct terug.

6p **19** ☐ Bereken welk percentage van die lampen te laat aankomt.

Het komt naar de zin van de tuinder toch te vaak voor dat een lamp te laat aankomt en dus na de andere lampen weer vertrekt. Hij wil daarom de kans verkleinen dat een lamp te laat aankomt: die mag niet groter zijn dan 0,001.
Dat kan hij bereiken door de lampen méér dan twee minuten te laten wachten voor zij teruggaan. De kans op het overschrijden van die wachttijd wordt dan kleiner.

5p **20** ☐ Hoeveel seconden moeten de lampen dan langer wachten voor ze aan de terugtocht beginnen? Licht je antwoord toe.

Einde