Wiskunde A

Examen HAVO en VHBO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

Vooropleiding
Hoger
Beroeps
Onderwijs

20 **00**

HAVO Tijdvak 2
VHBO Tijdvak 3
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 3, 10 en 13 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Opgave 1 Hypotheken

Als je een huis koopt, moet je meer betalen dan alleen de koopsom. Je moet bijvoorbeeld belasting betalen en de kosten van de notaris. Deze bijkomende kosten zijn voor een nieuwbouwhuis ongeveer 6% van de koopsom en voor een bestaande woning ongeveer 12%.

Iemand heeft een bestaande woning gekocht. De koopsom en de bijkomende kosten hebben haar in totaal 300 000 gulden gekost.

3p **1** □ Bereken de koopsom.

De meeste mensen die een huis willen kopen, lenen daarvoor geld bij de bank. Zo'n lening wordt een hypotheek genoemd. Het hoogste bedrag dat iemand kan lenen, heet *de haalbare hypotheek*. Deze hangt af van het jaarinkomen van de persoon die de hypotheek aanvraagt. Verder hangt deze ook af van de rente die over de hypotheek betaald moet worden.

In een brochure van bank X over hypotheken staat onderstaande tabel 1. Hierin staat voor een aantal jaarinkomens hoe groot de haalbare hypotheek is. Daarbij is men in deze tabel uitgegaan van een rentepercentage van 4%.

tabel 1

I	H
20	110
40	230
60	380
80	550

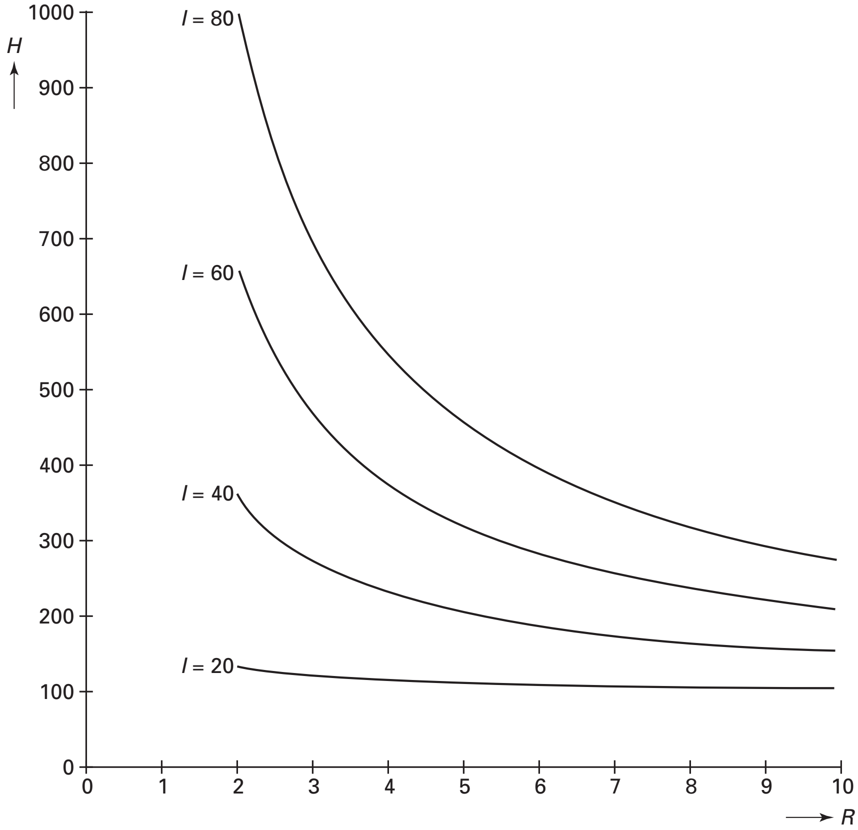
I: jaarinkomen (× 1000 gulden)
H: haalbare hypotheek (× 1000 gulden)

Iemand met een jaarinkomen van 53 000 gulden wil een huis kopen. De rente is 4%.

5p **2** □ Bereken met behulp van lineaire interpolatie hoe groot haar haalbare hypotheek is. Gebruik hierbij tabel 1.

Natuurlijk is het rentepercentage niet voortdurend 4%.
Daarom zijn in diezelfde brochure van bank X ook onderstaande grafieken opgenomen. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 1



H: haalbare hypotheek ($\times$ 1000 gulden)
I: jaarinkomen ($\times$ 1000 gulden)
R: rentepercentage

Iemand heeft een jaarinkomen van 50 000 gulden. Hij wil een huis kopen. Daarvoor heeft hij 220 000 gulden nodig. Hij wil dat hele bedrag lenen. De rente is 5%.

5p **3** □ Onderzoek met behulp van de figuur op de bijlage of de hypotheek die hij kan krijgen voldoende is om dit huis te kopen.

Een andere bank, bank Y, gebruikt onderstaande formule voor het bepalen van de haalbare hypotheek:

$$H = \frac{6{,}7 \cdot I^{1{,}35}}{R}$$

waarbij
H: haalbare hypotheek ($\times$ 1000 gulden)
I: jaarinkomen ($\times$ 1000 gulden)
R: rentepercentage

Iemand wil een huis kopen. Zijn jaarinkomen is 84 000 gulden. De rente is 5,8%. Hij krijgt bij bank Y een haalbare hypotheek die juist voldoende is om het huis te kopen.

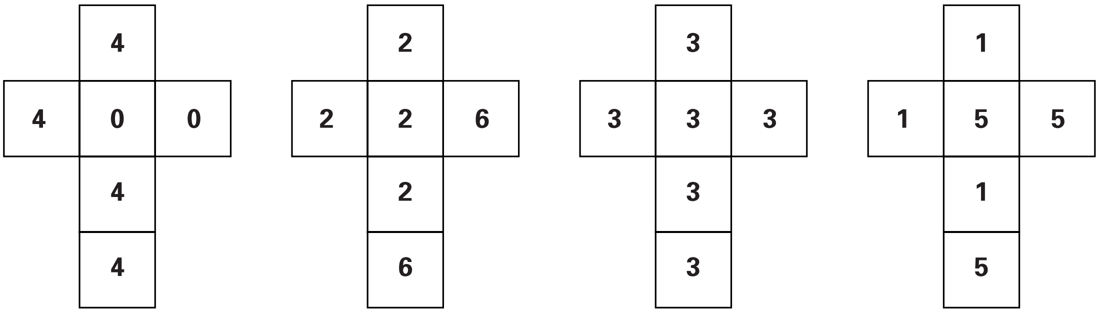
Vlak voor de aankoop stijgt de rente van 5,8% naar 6%.

6p **4** □ Bereken hoeveel zijn jaarinkomen zou moeten stijgen om een hypotheek bij bank Y te krijgen die nu toch voldoende is.

Opgave 2 Win-win-situatie

Het volgende dobbelspel is onder studenten in Nijmegen erg populair. Het wordt gespeeld door twee personen met vier verschillend gekleurde dobbelstenen met op elk vlakje een getal:

de rode	: vier vlakjes met een 4 en twee vlakjes met een 0
de blauwe	: vier vlakjes met een 2 en twee vlakjes met een 6
de gele	: zes vlakjes met een 3
de zwarte	: drie vlakjes met een 1 en drie vlakjes met een 5



rood blauw geel zwart

Het spel gaat als volgt: Bij elke beurt kiezen beide spelers een dobbelsteen. Ieder gooit zijn dobbelsteen. Wie het hoogste getal heeft gegooid wint de beurt.

Herma en Tom spelen dit spel. Herma laat Tom als eerste een dobbelsteen kiezen en pakt er vervolgens zelf een.

4p **5** □ Welke dobbelsteen zal Tom kiezen als hij gemiddeld een zo groot mogelijk getal wil gooien? Licht je antwoord toe.

Tom kiest de zwarte dobbelsteen. Als Herma dat ziet, pakt ze onmiddellijk de blauwe.

5p **6** □ Laat zien dat de kans dat Herma de beurt wint nu gelijk is aan $\frac{2}{3}$.

Het bijzondere aan dit spel is dat welke dobbelsteen Tom ook kiest, Herma daarna *altijd* precies één dobbelsteen kan pakken waarmee haar winstkans $\frac{2}{3}$ is.
Herma heeft een spiekbriefje gemaakt, waarop staat welke dobbelsteen ze moet pakken, als Tom zijn keuze heeft gemaakt. Het begin van dat briefje staat hier afgebeeld:

Tom	Ik
zwart	blauw
rood	.....
geel	.....
blauw	.....

5p **7** □ Maak Herma's spiekbriefje af. Licht je antwoord toe.

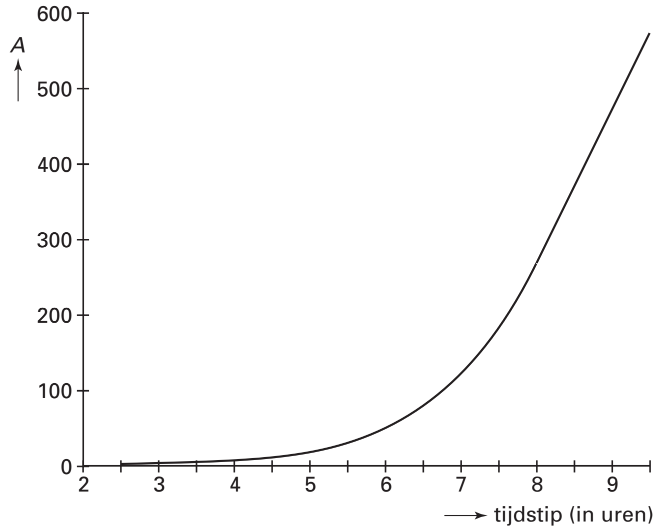
Neem nu dus aan dat Herma bij elke beurt een kans van $\frac{2}{3}$ heeft om te winnen.

4p **8** □ Bereken de kans dat Tom van de eerste drie beurten er toch een of meer wint.

Opgave 3 Kalm aan en rap een beetje

De voorverkoop voor de voorstellingen van 'Kalm aan en rap een beetje' van Herman Finkers begon om tien uur 's morgens.
De eerste wachtenden stonden al om half drie 's nachts bij de deur van de schouwburg. Ze gebruikten een viltstift om volgnummers op hun handen te schrijven. Navraag in de rij leerde dat het meisje met nummer 25 al vanaf half zes in de rij stond en de man met nummer 271 vanaf acht uur. De vrouw die nummer 455 had, kwam om negen uur.
De grafiek in figuur 2 hieronder geeft een goed beeld van het aantal wachtenden A.
Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 2



In de grafiek is te zien dat de groei van het aantal wachtenden vanaf acht uur vrijwel lineair verliep. Zoals eerder vermeld, waren er om acht uur 271 wachtenden en om negen uur 455.

Veronderstel dat de groei van het aantal wachtenden na acht uur lineair bleef.

4p **9** □ Bereken, uitgaande van deze lineaire groei, het aantal wachtenden om 9.45 uur.

De voorstelling kende vijf speelavonden. Voor elke avond waren er 480 kaartjes, in totaal dus 2400. Alle wachtenden mochten er maximaal vier kopen.
De zaterdag was natuurlijk het meest populair. Veronderstel dat eerst alle kaartjes voor zaterdag werden verkocht en vervolgens die voor vrijdag.
Iemand wilde zeker zijn van 4 kaartjes voor vrijdag en ging er daarom van uit dat iedereen die voor hem in de rij stond 4 kaartjes kocht.

4p **10** □ Hoe laat had deze persoon uiterlijk in de rij moeten gaan staan? Licht je antwoord met behulp van de figuur op de bijlage toe.

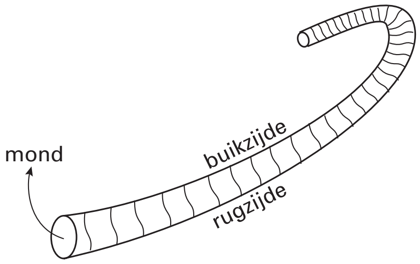
Toen om tien uur de kassa open ging, konden de wachtenden hun kaartjes kopen.
Er werd snel gewerkt: per uur kregen 100 kopers hun kaartjes.
De totale wachttijd voor iemand kan nu gevonden worden door de wachttijden vóór en ná 10 uur bij elkaar op te tellen.

5p **11** □ Onderzoek wie er in totaal het langst heeft moeten wachten, het meisje met nummer 25 of de vrouw met nummer 455.

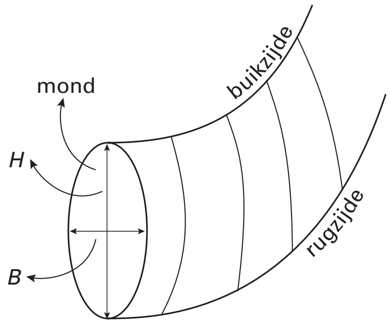
Opgave 4 Hamieten

Hamieten zijn schelpjes van gestorven weekdieren. Zie figuur 3. Ze worden gevonden in de Boulonnais, een streek in Frankrijk.

figuur 3



figuur 4



Er zijn verschillende soorten hamieten. Soms is het lastig te zien tot welke soort een hamiet behoort. In deze opgave kijken we naar twee kenmerken. Op grond van deze kenmerken kunnen we met grote waarschijnlijkheid de soort vaststellen van een groot aantal hamieten.

Allereerst wordt de vorm van de mond van de hamiet bekeken. Zie figuur 4. H is de hoogte van de mond die gemeten wordt tussen de rugzijde en de buikzijde en B is de breedte. De verhouding tussen H en B is het eerste kenmerk waarmee we de hamietensoort proberen vast te stellen. We noemen deze verhouding Q, dus

$$Q = \frac{H}{B}$$

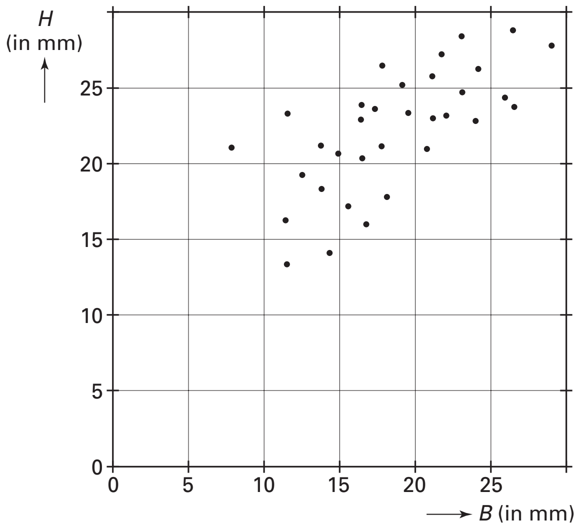
Door te kijken naar de grootte van Q kunnen we de hamieten onderscheiden in hamieten met een *ronde* mond, een *iets ovale* mond of een *echt ovale* mond.
We spreken over een *ronde* mond als Q tussen 0,95 en 1,05 ligt.

Van een hamiet met een *ronde* mond is de mondhoogte 25,0 mm.

4p **12** □ Bereken de minimale mondbreedte die deze hamiet moet hebben.

In figuur 5 is voor een aantal hamieten de hoogte H en de breedte B van de mond aangegeven. Iedere stip stelt een hamiet voor.

figuur 5



Figuur 5 vind je ook op de bijlage.

5p **13** □ Geef door middel van arcering op de bijlage aan in welk gebied hamieten met een *ronde* mond liggen.

De hamietensoort Gibbosus heeft meestal een *iets ovale* mond. Er zijn echter ook exemplaren van de soort Gibbosus met een *ronde* mond. Uit onderzoek blijkt voor de soort Gibbosus dat Q vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1,13 en een standaardafwijking van 0,06.

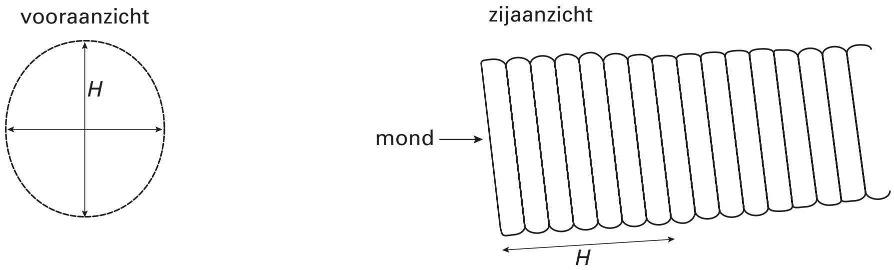
5p **14** □ Hoeveel procent van deze soort heeft een *ronde* mond? Licht je antwoord toe.

Hamieten met een Q-waarde tussen 0,95 en 1,05 hebben dus een *ronde* mond. Als de Q-waarde van een hamiet groter is dan 1,05, dan wordt de mond van de hamiet ovaal genoemd. Daarbij wordt onderscheid gemaakt tussen *iets ovaal* en *echt ovaal*.
De grens tussen *iets ovaal* en *echt ovaal* ligt bij een bepaalde Q-waarde. Als Q groter is dan deze waarde, dan wordt de hamiet *echt ovaal* genoemd.
Van de hamietensoort Gibbosus heeft 37% een *echt ovale* mond.

6p **15** □ Vanaf welke waarde van Q, in 2 decimalen nauwkeurig, spreekt men blijkbaar over *echt ovaal*? Licht je antwoord toe.

Q was het eerste kenmerk om de hamietensoort vast te stellen. Men gebruikt als tweede kenmerk het aantal ribben vanaf de mond over een lengte ter grootte van H. Zie het zijaanzicht in figuur 6. Dit aantal wordt N genoemd.

figuur 6



Met behulp van onderstaande tabel 2 kunnen we op grond van de twee kenmerken Q en N de hamietensoort proberen vast te stellen.

tabel 2

Soort	Q	N
Rotundus	0,95 – 1,05	5 – 8
Gibbosus	1,00 – 1,25	4 – 6
Attenuatus	1,05 – 1,25	7 – 8
Compressus	1,15 – 1,65	7 – 8
Tenuicostatus	1,15 – 1,45	9 – 10

Van een hamiet zijn in bovenstaande figuur 6 het vooraanzicht en zijaanzicht *op ware grootte* getekend. Met behulp van het vooraanzicht is Q te berekenen. Uit het zijaanzicht blijkt dat $N = 7$.

4p **16** □ Tot welke soort behoort deze hamiet? Licht je antwoord toe.

Bij sommige waarden van Q en N geeft tabel 2 echter geen duidelijkheid. Een hamiet met, bijvoorbeeld, een Q-waarde tussen 1,15 en 1,25 én een N-waarde van 7 of 8 kan zowel tot de soort Attenuatus als tot de soort Compressus behoren.

3p **17** □ Geef nog een voorbeeld van een hamiet die op grond van tabel 2 kan behoren tot twee verschillende soorten. Vermeld Q-waarde en N-waarde bij je voorbeeld.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Opgave 5 Grasland

Grasland kan verdeeld worden in kwaliteitsklassen. Op het ene stuk grasland groeit het gras immers beter dan op het andere. Elk stuk grasland kan worden ingedeeld in een van de klassen 1 tot en met 7. Op grasland van klasse 1 groeit het gras het slechtst. Hoe beter het gras groeit, hoe hoger de klasse waarin dat grasland wordt ingedeeld. De kwaliteit van een stuk grasland kan in de loop van de tijd veranderen, bijvoorbeeld door bemesting of door intensief gebruik voor recreatie.
Men doet al een aantal jaren onderzoek naar deze veranderingen bij het grasland van Zuid-Holland. De resultaten van het onderzoek staan in matrix M:

matrix

$$M: \quad \text{naar} \quad \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}17 & 0{,}50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}17 & 0{,}38 & 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0 & 0{,}14 & 0 \\ 0{,}33 & 0{,}16 & 0{,}25 & 0{,}53 & 0{,}49 & 0{,}33 & 0{,}20 \\ 0 & 0 & 0{,}12 & 0{,}20 & 0{,}39 & 0{,}39 & 0{,}40 \\ 0{,}17 & 0 & 0 & 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}14 & 0{,}40 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrix M geeft de veranderingen per drie jaar weer. Zo zien we bijvoorbeeld dat 16% van het grasland dat tot klasse 2 behoorde, drie jaar later grasland is van klasse 5.
Men gaat er van uit dat matrix M de veranderingen in elke periode van drie jaar beschrijft.

4p **18** □ Leg uit hoe je aan de matrix kunt zien dat er in Zuid-Holland een verschuiving optreedt naar grasland met een hogere kwaliteit.

In tabel 3 staat hoe in 1989 het grasland in de provincie Zuid-Holland over de verschillende klassen verdeeld was.

tabel 3

Klasse	1	2	3	4	5	6	7
Percentage	0,14	0,74	2,88	15,28	36,24	37,17	7,55

Zo zien we bijvoorbeeld dat 15,28% van het grasland in Zuid-Holland in 1989 tot klasse 4 behoorde.

5p **19** □ Bereken hoeveel procent van het grasland in 1992 tot klasse 4 behoorde.

Voor het jaar 2004 hebben de onderzoekers de volgende verdeling voor Zuid-Holland voorspeld:

tabel 4

Klasse	1	2	3	4	5	6	7
Percentage	0,00	0,03	1,91	7,13	38,46	37,24	15,23

4p **20** □ Geef duidelijk aan hoe deze verdeling berekend kan worden zonder dat je de berekening zelf uitvoert.

Einde