

**Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 10 en 11 is een bijlage toegevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Servicekosten

Een flat bestaat uit vijf woonlagen. Woonlaag 1 bevindt zich op de begane grond, woonlaag 2 op de eerste verdieping, woonlaag 3 op de tweede verdieping, enzovoort. Op elke woonlaag zijn evenveel woningen.

De woonlagen zijn te bereiken via een trappenhuis. De kosten van de verlichting van dit trappenhuis bestaan uit energiekosten en kosten die worden gemaakt in verband met het vervangen van lampen. Deze servicekosten moeten door de bewoners van de flat worden betaald. De verhuurder verdeelt de jaarlijkse kosten van 720 euro gelijkmatig over de woonlagen. Iedere woonlaag moet dus 144 euro betalen.

De bewoners van woonlaag 1 maken hiertegen bezwaar. Voor hen hoeft er alleen op woonlaag 1 in het trappenhuis licht te branden, dus waarom zouden ze voor de vier andere woonlagen betalen?

De verhuurder voelt iets voor dit argument. Hij laat elke andere woonlaag twee keer zo veel betalen als woonlaag 1.

- 3p 1 Bereken het bedrag dat woonlaag 1 moet betalen.

Nu komen de bewoners van woonlaag 2 in opstand. Ze willen wel betalen voor het licht in het trappenhuis op woonlaag 1 en 2. Maar voor de verlichting op de hogere woonlagen willen ze niet betalen.

De verhuurder laat de bewoners alleen betalen voor de verlichting die ze daadwerkelijk 'gebruiken'. De bedragen voor de woonlagen verhouden zich dan als 1:2:3:4:5.

- 4p 2 Bereken voor elke woonlaag het bedrag dat betaald moet worden.

De verhuurder bezit ook andere flats, waarvan sommige met veel meer woonlagen. Ook daar worden de servicekosten verdeeld over de woonlagen in de verhouding 1:2:3:4:... . Om de kosten in een flat op deze manier te verdelen, heeft de verhuurder de volgende formule opgesteld:

$$P = \frac{200k}{n(n+1)}$$

Hierin is P het percentage van de servicekosten dat de k^{e} woonlaag moet betalen in een flat met n woonlagen.

- 4p 3 Toon aan dat de bovenste drie woonlagen van een flat, bestaande uit 21 woonlagen, meer dan $\frac{1}{4}$ deel van de servicekosten moeten betalen.

De totale energiekosten van alle gemeenschappelijke ruimtes (trappenhuisen, parkeergarages, etc.) die de verhuurder bezit, zijn in de afgelopen jaren fors gestegen. Zo waren in 1994 de totale energiekosten nog 20 500 euro. Zeven jaar later waren die gestegen tot een bedrag van 28 100 euro.

In een brief aan de bewoners wordt deze kostenstijging als voorbeeld genoemd waarom de servicekosten weer worden verhoogd.

In deze brief sprak men niet over deze absolute bedragen, maar over een vast jaarlijks groeipercentage waarmee de totale energiekosten waren gestegen.

- 5p 4 Bereken dit percentage.

Uit de wielersport komen de laatste jaren regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken steeds vaker naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is *erythropoëtine*, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren. De *hematocrietwaarde* is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt dus als een wielrenner EPO gaat gebruiken.

We gaan er in deze opgave van uit dat voor wielrenners die geen EPO gebruiken, geldt: de hematocrietwaarde is normaal verdeeld met een gemiddelde van 45 en een standaardafwijking van 2,7.

- 5p **5** Hoeveel procent van de wielrenners die geen EPO gebruiken, heeft een hematocrietwaarde die hoger is dan 46? Licht je antwoord toe.
- 5p **6** Tussen welke grenzen ligt de middelste 75% van de hematocrietwaarden van wielrenners die geen EPO gebruiken? Licht je antwoord toe.

Het gebruik van EPO is lastig aan te tonen, maar de hematocrietwaarde kan wel worden gemeten. Iedere wielrenner met een te hoge hematocrietwaarde krijgt een startverbod opgelegd. De UCI, de internationale wielerbond, hanteert een grens van 50. Volgens de UCI is er voor een wielrenner met een hematocrietwaarde boven die grens een gezondheidsrisico wanneer hij aan wedstrijden deelneemt. Een te hoge hematocrietwaarde is geen bewijs voor EPO-gebruik, want sommigen hebben van nature een hoge hematocrietwaarde en zijn dus 'onschuldig'.

De internationale skibond hanteert een grens van 53. Bij hen leidt een hematocrietwaarde boven 53 dus tot een startverbod.

- 5p **7** Hoeveel procent van de wielrenners die geen EPO gebruiken zou door de wielerbond een startverbod opgelegd krijgen, maar door de skibond niet? Licht je antwoord toe.

Er zijn critici die bezwaar maken tegen deze grens van 50. Het is duidelijk dat elke grens wel eens 'onschuldige slachtoffers' oplevert. Maar bij deze grens zouden er, zo vinden die critici, te veel onschuldige wielrenners gestraft worden. Ze stellen voor de grens te veranderen. Van de wielrenners die geen EPO gebruiken, zal dan 1% een startverbod krijgen wegens een te hoge hematocrietwaarde.

- 4p **8** Hoe groot zou die nieuwe grens moeten zijn? Licht je antwoord toe.

Play-offs

In de Verenigde Staten spelen de basketbalteams in de hoogste klasse eerst een gewone competitie. Het team dat als eerste in de competitie eindigt, is nog niet de kampioen. Om kampioen te worden, moeten de zogenaamde play-offs gewonnen worden. De acht beste teams van de competitie doen aan deze play-offs mee. Deze play-offs bestaan uit drie rondes.

In iedere ronde worden twee teams aan elkaar gekoppeld. Iedere wedstrijd levert een winnaar op. Een gelijkspel is in de play-offs niet mogelijk. In de eerste ronde spelen acht teams. Dat levert vier winnaars op. Die vier teams spelen in de tweede ronde. De tweede ronde levert dan twee winnaars op. Die twee teams spelen in de derde ronde.

In de eerste ronde speelt ieder tweetal teams een 'best of three'. Een 'best of three' bestaat uit twee of drie wedstrijden. Het team dat twee wedstrijden gewonnen heeft, gaat door naar de volgende ronde. Dat kan dus al na twee wedstrijden beslist zijn. In de tweede ronde wordt een 'best of five' gespeeld. Het team dat drie wedstrijden gewonnen heeft, gaat door naar de volgende ronde. In de derde ronde spelen de twee overgebleven teams een 'best of seven'. Deze teams spelen een aantal wedstrijden tegen elkaar, totdat één team vier keer gewonnen heeft. Dit team is de kampioen basketbal van de Verenigde Staten. In tabel 1 vatten we dit nog eens samen.

tabel 1

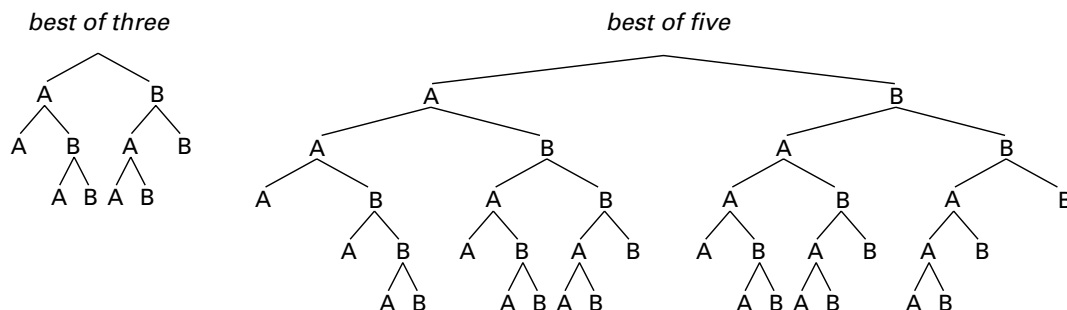
ronde	naam	aantal teams	winnaar is het team dat
1	best of three	8	twee keer gewonnen heeft van de ander
2	best of five	4	drie keer gewonnen heeft van de ander
3	best of seven	2	vier keer gewonnen heeft van de ander: <i>de kampioen</i>

Het totale aantal wedstrijden dat de kampioen gespeeld heeft in de play-offs, is niet altijd hetzelfde.

- 4p 9 Wat is het grootste aantal wedstrijden dat een team in de play-offs kan spelen? Licht je antwoord toe.

In de boomdiagrammen hieronder staan alle mogelijke manieren waarop de serie wedstrijden tussen twee teams A en B in een 'best of three' of een 'best of five' kan verlopen. De letters A en B geven aan welk team een wedstrijd wint.

diagrammen



Bij een 'best of three' zijn er 6 mogelijke manieren.
 Bij een 'best of five' zijn er 20 mogelijke manieren.
 Bij een 'best of seven' zullen er nog veel meer mogelijkheden zijn.

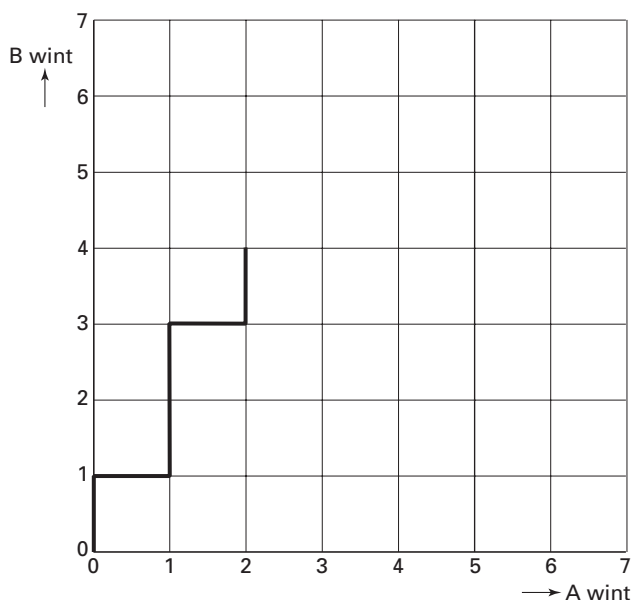
Het is ook mogelijk om een verloop van de serie wedstrijden tussen A en B in een rooster weer te geven.

Als voorbeeld nemen we de volgorde BABBAB bij een 'best of seven'.

Daarmee geven we aan: A wint de tweede en de vijfde wedstrijd en B wint de eerste, de derde, de vierde en de zesde wedstrijd. B wint deze 'best of seven' dus met 2–4.

Deze volgorde staat aangegeven in het rooster in figuur 1. Het eindpunt is (2, 4).

figuur 1



- 4p **10** □ Geef in het rooster op de bijlage duidelijk alle punten aan die eindpunt kunnen zijn bij het spelen van een 'best of seven'.

De eindstand 2–4 in een 'best of seven' kan alleen bereikt worden via de stand 2–3.

Het aantal volgordes naar de eindstand 2–4 is daarom gelijk aan het aantal volgordes naar de stand 2–3.

Dit geldt voor elke eindstand: het aantal volgordes is gelijk aan het aantal volgordes naar de stand die er voor het begin van de laatste wedstrijd was.

- 6p **11** □ Op hoeveel verschillende manieren kan een 'best of seven' verlopen? Licht je antwoord toe. Je kunt hierbij het rooster op de bijlage gebruiken.

De teams van de Atlanta Rangers en de Boston Raptors zijn uiteindelijk overgebleven en spelen nu een 'best of seven'. De winnaar van deze 'best of seven' is dan de kampioen van de Verenigde Staten.

De Atlanta Rangers en de Boston Raptors hebben in het verleden al vaak tegen elkaar gespeeld. Op grond daarvan neemt men aan dat in elke wedstrijd de Boston Raptors een kans van $\frac{2}{3}$ hebben om te winnen van de Atlanta Rangers.

Toch hebben de Atlanta Rangers de eerste drie wedstrijden gewonnen.

- 4p **12** □ Bereken de kans dat de Atlanta Rangers na dit mooie begin kampioen van de Verenigde Staten worden.

Havo-top

De leiding van een ROC (Regionaal Opleidingen Centrum) heeft gedurende een groot aantal jaren bijgehouden hoe het de studenten van de havo-top verging.

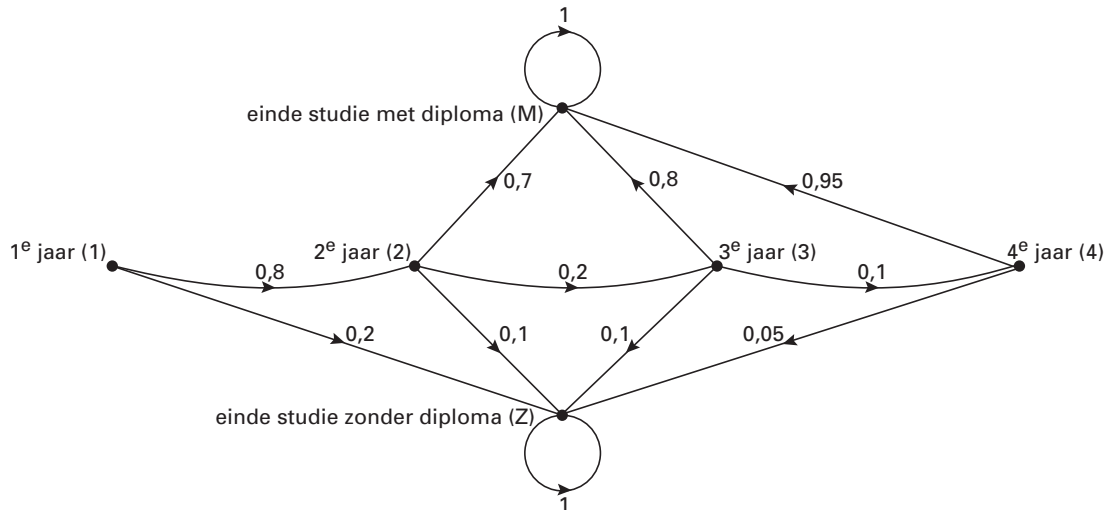
De havo-top is een tweejarige opleiding: havo 4 en havo 5.

Veel studenten deden er door omstandigheden echter drie of vier jaar over.

Geen van de studenten bleef langer dan vier jaar op deze opleiding.

In figuur 2 is de situatie geschetst voor dit ROC. Neem aan dat figuur 2 de situatie van elk jaar weergeeft.

figuur 2



Zo zien we dat 20% van alle studenten die aan de opleiding beginnen, tijdens of aan het eind van het eerste jaar al afhaakt. Een klein aantal studenten had na drie jaar nog geen diploma, maar van diegenen die aan het vierde jaar begonnen, slaagde 95%.

Verder zien we dat van alle studenten die het ROC zonder diploma hebben verlaten, niemand zal terugkeren naar dit ROC. Zij zullen dus nooit een havo-diploma op dit ROC behalen.

In een bepaald jaar worden 150 eerstejaarsstudenten aangenomen.

sp 13 □ Hoeveel procent van hen zal het ROC met een diploma verlaten? Licht je antwoord toe.

De informatie uit figuur 2 staat ook in onderstaande matrix D :

$$\begin{array}{l} \text{naar} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ Z \\ M \end{array} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} & \text{van} & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & Z & M \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ Z \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,05 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,8 & 0,95 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = D \end{array} \right.$$

De coördinatoren van de havo-top houden zich bezig met de begeleiding van de studenten. Op zeker moment zijn er volgens hun informatie 230 eerstejaars, 190 tweedejaars, 40 derdejaars en 20 vierdejaarsstudenten.

- 6p **14** Bereken hoe de situatie voor deze 480 studenten één jaar later zal zijn.

Het is mogelijk om uit de matrix D meer informatie te verkrijgen.

Zo kun je de matrix D^2 (dat is $D \times D$) berekenen en bestuderen.

- 5p **15** Bereken de elementen in de tweede kolom van de matrix D^2 en geef de betekenis van deze elementen.

Als je hogere machten van D berekent, blijkt dat die vanaf een gegeven moment niet meer veranderen: D^4, D^5, D^6, \dots zijn allemaal gelijk aan de onderstaande matrix.

		van						
		1	2	3	4	Z	M	
naar	1	(0	0	0	0	0	0
	2		0	0	0	0	0	0
	3		0	0	0	0	0	0
	4		0	0	0	0	0	0
	Z		0,2968	0,121	0,105	0,05	1	0
	M		0,7032	0,879	0,895	0,95	0	1
)						

- 3p **16** Leg uit waarom deze matrices vanaf de vierde macht niet meer veranderen.

- 3p **17** Leg uit wat de betekenis is van het getal 0,121 in de tweede kolom van deze matrices.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Nieuwe tijden

Swatch, het trendy Zwitserse horlogemerk, heeft een nieuw tijdsysteem bedacht naast het huidige tijdsysteem. In ons gewone tijdsysteem geven we de tijd aan in uren, minuten en seconden. Het nadeel hierbij is dat het niet overal op aarde even laat is. Daarom moet je goed nadenken hoe laat je vanuit Nederland moet bellen om bijvoorbeeld iemand in New York tijdens zijn lunch te bereiken.

In dat nieuwe tijdsysteem is het overal op de wereld even laat. Het nieuwe systeem werkt als volgt. Een etmaal van 24 uur wordt verdeeld in 1000 eenheden, *beats* genaamd. Daarbij heeft men afgesproken dat 000 beat valt op middernacht in Zwitserland, waar Swatch vandaan komt. Wanneer het daar 570 beat is, is het overal op de wereld 570 beat. De notatie in beats is als volgt: @570.

3p **18** □ Toon aan dat 1 beat 86,4 seconden duurt.

De aarde is verdeeld in 24 verschillende tijdzones. Deze zones zijn vastgelegd ten opzichte van de nulmeridiaan die door Greenwich in Groot-Brittannië loopt. Zo ligt Zwitserland net als Nederland in tijdzone GMT+1. Dat wil zeggen dat het hier 1 uur later is dan op de nulmeridiaan. De stad New York, waar het 5 uur vroeger is dan op de nulmeridiaan, ligt in tijdzone GMT−5.

Je neemt vanuit Taiwan om @470 contact op met iemand in Nederland.
4p **19** □ Bereken in minuten nauwkeurig hoe laat het dan in Nederland is volgens het gewone tijdsysteem.

figuur 3



In figuur 3 zie je een horloge dat de tijd weergeeft volgens beide tijdsystemen.
4p **20** □ Van welke tijdzone geeft dit horloge de tijd aan? Licht je antwoord toe.

Met een formule kan elk tijdstip in Zwitserland (in uren, minuten en seconden) worden omgerekend naar beats. Deze formule is van de volgende vorm:

$$B = a \cdot U + b \cdot M + c \cdot S$$

Hierbij zijn U , M en S respectievelijk de aantallen uren, minuten en seconden in het huidige tijdsysteem en B de bijbehorende tijd in beats.

4p **21** □ Bereken in 4 decimalen nauwkeurig de waarden van a , b en c .

Einde