Eindexamen wiskunde A havo 1996-II

Opgave 1 Controle van de lotto

Het Nederlands Meetinstituut te Delft controleert of de lotto een eerlijk gokspel is. Men vraagt zich daarbij af of ieder lottoballetje eenzelfde kans heeft om getrokken te worden. Hiervoor wordt de trekkingsmachine getest. Bij die test worden slechts vijf balletjes gebruikt en laat men de machine 5000 keer één balletje uit deze vijf balletjes trekken. Na iedere trekking wordt het getrokken balletje weer teruggelegd. Na afloop van de 5000 trekkingen wordt geteld hoe vaak ieder van de vijf balletjes getrokken is. Deze aantallen heten de *uitkomsten*.
Bij een goede trekkingsmachine zal elk balletje naar verwachting 1000 keer getrokken worden. Natuurlijk zal dat meestal niet precies gebeuren. Een balletje kan bijvoorbeeld 980 keer of 1023 keer getrokken worden. Er zal sprake zijn van een zekere spreiding. In dergelijke situaties is de uitkomst van ieder balletje bij een goede trekkingsmachine vrijwel normaal verdeeld.
Neem daarom bij vraag 1 en 2 aan dat bij een goede trekkingsmachine de uitkomst van ieder balletje normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1000 en een standaardafwijking van 28,3.

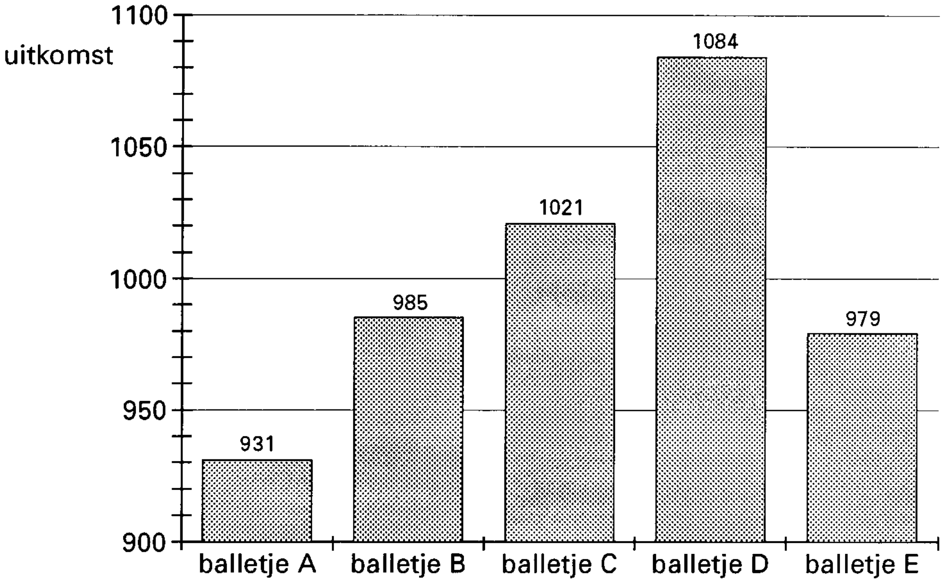
5p **1** □ Bereken de kans dat bij het testen van een goede trekkingsmachine een bepaald balletje 950 of minder keren getrokken wordt.

6p **2** □ Bereken de kans dat bij een goede trekkingsmachine de uitkomst van een bepaald balletje verder dan 3 keer de standaardafwijking van 1000 af ligt.

Volgens de Wet op de Kansspelen is een uitkomst die niet verder dan drie keer de standaardafwijking (hier dus 28,3) van 1000 af ligt, aanvaardbaar. Ligt minstens één van de uitkomsten verder dan drie keer de standaardafwijking van 1000 af, dan zal de trekkingsmachine volgens deze Wet afgekeurd worden.

Veronderstel dat de test van een trekkingsmachine de uitkomsten oplevert die in figuur 1 staan. Voor het gemak zijn de 5 balletjes van de namen A, B, C, D en E voorzien. Bij iedere staaf staat de uitkomst van het bijbehorende balletje vermeld.

figuur 1



5p **3** □ Moet de trekkingsmachine volgens de Wet op de Kansspelen afgekeurd worden? Licht je antwoord toe.

Opgave 2 McDonald's

De fastfoodketen McDonald's heeft in verschillende landen heel wat vestigingen. Alleen al in de Verenigde Staten (VS), waar 250 miljoen mensen wonen, zijn er 9500 vestigingen. Nederland heeft 15 miljoen inwoners.

Neem eerst aan dat de verhouding van het aantal vestigingen en het aantal inwoners in Nederland even groot is als in de VS.

4p 4 □ Hoeveel vestigingen zouden er dan in Nederland zijn? Licht je antwoord toe.

J. Cantapulo heeft de leiding over de internationale afdeling van McDonald's. Voor het bepalen van het gewenste aantal vestigingen M_X in een bepaald land X gaat hij uit van de volgende formule:

$$M_X = \frac{\textit{aantal inwoners van land X}}{\textit{gemiddeld aantal inwoners per vestiging in VS}} \cdot \frac{\textit{gemiddeld inkomen in land X}}{\textit{gemiddeld inkomen in VS}}$$

Het gemiddeld inkomen in een land vindt men door het totale inkomen, omgerekend in dollars, te delen door het aantal inwoners van dat land.

Het totale inkomen in Nederland is 253 miljard dollar. We schrijven dit als TI_{NED} = 253 miljard. Voor de VS geldt: TI_{VS} = 4950 miljard.

5p 5 □ Bereken hoe groot het gewenste aantal vestigingen in Nederland is volgens de formule van Cantapulo.

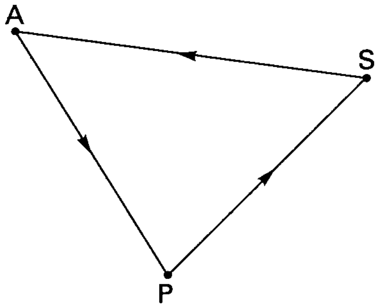
We gaan uit van de gegevens over de VS, te weten 9500 McDonald's vestigingen, TI_{VS} = 4950 miljard en een bevolking van 250 miljoen mensen. De formule van Cantapulo kan vereenvoudigd worden, zodat M_X wordt uitgedrukt in TI_X.

4p 6 □ Stel deze formule op.

Opgave 3 Consequent

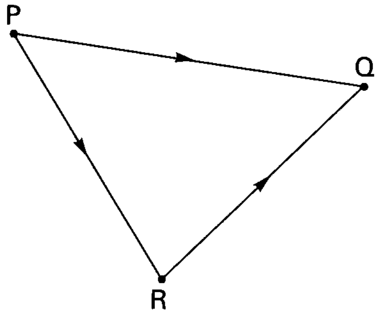
Er wordt een drietal vragen aan dezelfde persoon gesteld:
Wat heeft u liever: appels of peren? Antwoord: appels.
Wat heeft u liever: peren of bananen? Antwoord: peren.
Wat heeft u liever: appels of bananen? Antwoord: bananen.
Dat laatste antwoord lijkt heel onlogisch, je zou immers het antwoord 'appels' hebben verwacht. Toch komen zulke situaties vaak voor. Mogelijk heeft de persoon bij de eerste twee vragen gedacht aan zaken als kleur of vorm en bij de derde vraag aan smaak.
Ook in de sport komen dergelijke situaties herhaaldelijk voor.
Bijvoorbeeld team A wint van team P, team P wint van team S en team S wint van team A. Zo'n drietal of *tripel* APS noemen we een *inconsequent tripel.*
Een dergelijk drietal kunnen we in een gerichte graaf weergeven. Zie figuur 2.
Hierbij betekent A → P dat A van P wint. De pijl wijst dus van winnaar naar verliezer.

figuur 2



In figuur 3 is de gerichte graaf van een *consequent tripel* getekend. Team P is het sterkst en wint van Q en van R. Team Q is het zwakst en verliest van beide andere teams.

figuur 3



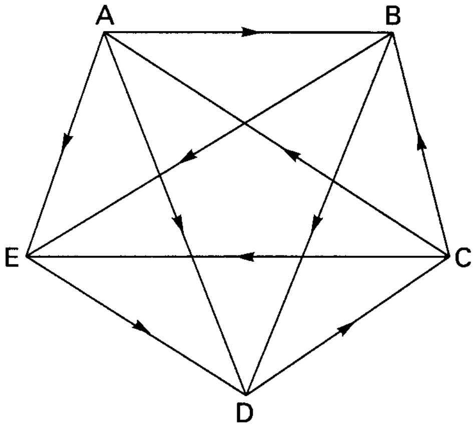
In het vervolg van deze opgave zijn er steeds vijf teams: A, B, C, D en E. In een competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.
Neem aan dat de teams gerangschikt kunnen worden van sterk naar zwak:
C → A → B → E → D.

We bekijken eerst een voorbeeld waarin alleen consequente tripels voorkomen. Iedere wedstrijd wordt gewonnen door het hoger geplaatste team.
Kijken we bijvoorbeeld naar het tripel AED dan zal A van E winnen, E van D en ook A van D. Zo ontstaat het consequente tripel AED.
Ook ieder ander drietal teams vormt steeds een consequent tripel.
Bij deze situatie horen een gerichte graaf en een verbindingsmatrix *V*.

6p 7 □ Teken deze graaf op de bijlage en vul verbindingsmatrix *V* verder in.

Vaak echter zullen er in dergelijke competities ook inconsequente tripels te vinden zijn. Een voorbeeld daarvan is weergegeven in de graaf van figuur 4 met de bijbehorende matrix W. Hier zien we bijvoorbeeld dat ABE een consequent tripel en ECD een inconsequent tripel is.

figuur 4



matrix W

$$\begin{array}{cc} & \text{winnaar} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{verliezer} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6p **8** □ Schrijf alle bij deze graaf horende tripels op en vermeld steeds of het om een consequent of een inconsequent tripel gaat.

Matrix V (van vraag 7) en matrix W (in figuur 4) en de bijbehorende grafen verschillen. De graaf van V is 'consequenter' dan de graaf die bij W hoort. De mate van consequentie van een graaf wordt uitgedrukt in de *consequentiecoëfficiënt* K. Deze is als volgt te berekenen:

$$K = 1 - \frac{\textit{aantal inconsequente tripels van de graaf}}{\textit{maximaal aantal inconsequente tripels}}$$

Dit maximale aantal inconsequente tripels is natuurlijk afhankelijk van het aantal punten in de graaf.

Voor grafen met een oneven aantal punten (n) is het maximale aantal inconsequente tripels te berekenen met de volgende formule:

$$\textit{maximaal aantal inconsequente tripels} = \frac{n^3 - n}{24}$$

4p **9** □ Hoe groot is K voor de graaf van figuur 4? Licht je antwoord toe.

K kan ook berekend worden met behulp van de formule:

$$K = \frac{(\textit{gerealiseerde standaardafwijking})^2}{(\textit{maximale standaardafwijking})^2}$$

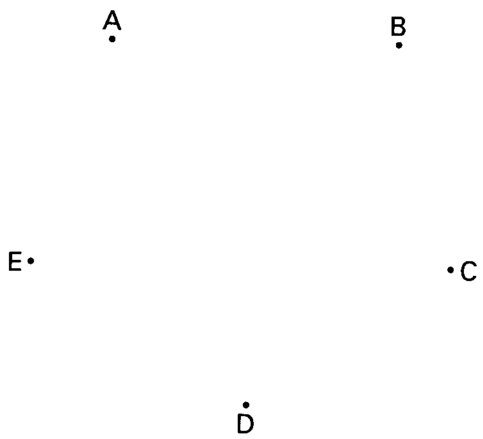
In deze formule is de *maximale standaardafwijking* de standaardafwijking van de kolomtotalen van matrix V uit vraag 7.
Neem aan dat de maximale standaardafwijking gelijk is aan 1,41.
In deze formule is de *gerealiseerde standaardafwijking* de standaardafwijking van de kolomtotalen van de bijbehorende matrix.
Een kolomtotaal wordt gevonden door de getallen in een kolom bij elkaar op te tellen.
Bij matrix W van figuur 4 gaat het dus om de standaardafwijking van de getallen 3, 2, 3, 1 en 1.

4p **10** □ Bereken met deze formule K voor matrix W.

Bijlage bij de vragen 7, 11 en 15

Vraag 7

graaf



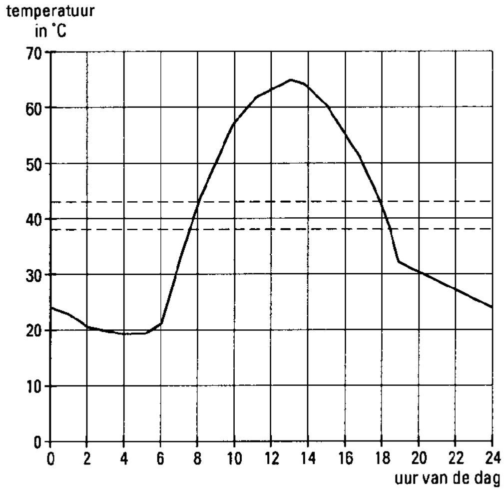
matrix V

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{winnaar} \\
 & & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\text{verliezer} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Opgave 4 Woestijnhagedis

De woestijnhagedis (dipsosaurus dorsalis) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijnen zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur.
In figuur 5 zie je het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus.
Deze figuur staat ook op de bijlage. Alleen als de temperatuur tussen de 38 °C en 43 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel.

figuur 5 *Dagelijks temperatuurverloop in de periode eind juli/begin augustus*



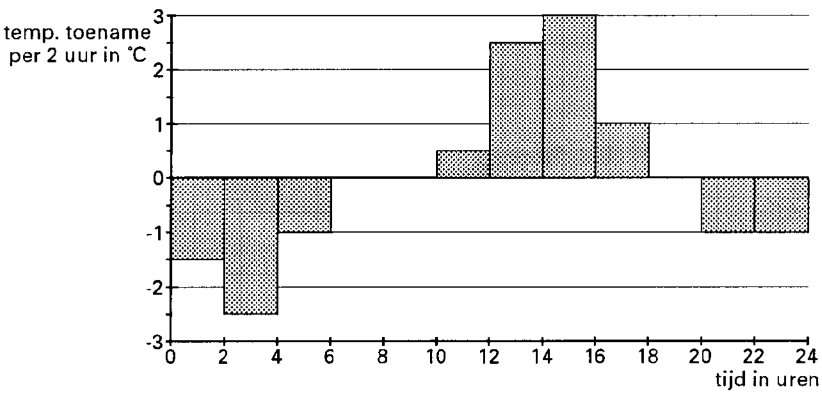
4p **11** □ Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe. Gebruik daarbij de figuur op de bijlage.

In figuur 5 is te zien dat de temperatuur tussen 6 uur en 11 uur vrij snel stijgt.

4p **12** □ Bereken voor deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur.

Gedurende de tijd dat de hagedis niet actief is met het zoeken naar voedsel, bevindt hij zich voornamelijk in zijn hol. In figuur 6 zie je een toename-/afnamediagram van de temperatuur in het hol. Ook deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig was deze temperatuurmetingen te verrichten, kun je hierin slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat de temperatuur tussen 0 en 2 uur met 1,5 graden is gedaald.

figuur 6

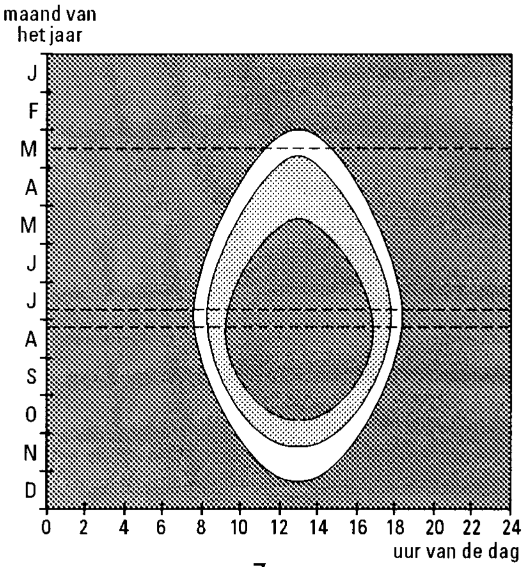


Er zijn twee belangrijke verschillen tussen het temperatuurverloop buiten het hol (figuur 5) en in het hol (figuur 6). Het ene heeft betrekking op de temperatuurschommeling, het andere op het tijdstip waarop de maximale temperatuur optreedt.

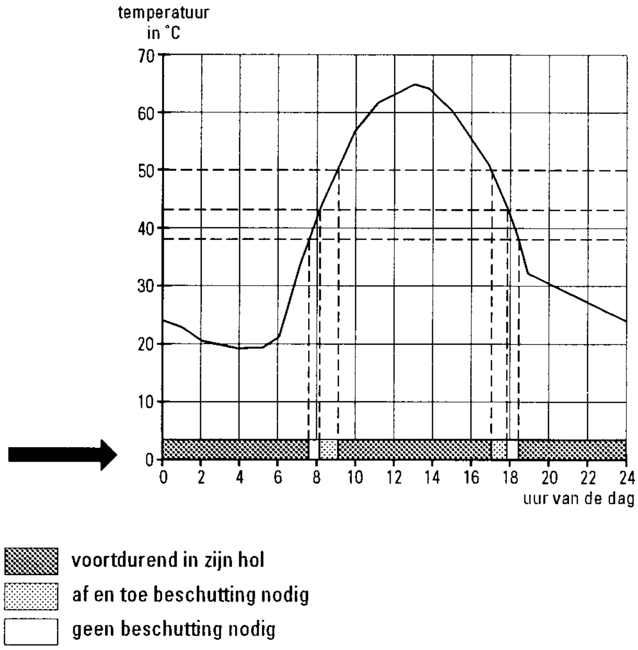
4p **13** □ Beschrijf deze twee verschillen.

Zoals al vermeld, is de woestijnhagedis buiten zijn hol als de temperatuur tussen 38 °C en 43 °C is. Hij heeft dan *geen beschutting nodig*. Als de temperatuur tussen de 43 °C en 50 °C is, dan moet hij *af en toe beschutting zoeken* tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt hij zich *voortdurend in zijn hol.*
Er zijn dus drie fasen in het leefritme van de hagedis:
. *geen beschutting nodig;*
. *af en toe beschutting nodig;*
. *voortdurend in zijn hol.*
In figuur 7 kunnen we voor iedere dag van het jaar en voor ieder tijdstip op die dag de fase terugvinden waarin het leefritme van de hagedis zich bevindt.
Bovendien is er in figuur 7 een horizontaal strookje rond eind juli/begin augustus aangegeven. Dit strookje zien we in figuur 8 terug. In figuur 8 zie je hetzelfde temperatuurverloop als in figuur 5.

figuren 7 en 8



7



8

In figuur 7 is te zien dat de hagedis niet iedere dag even lang in de fase *voortdurend in zijn hol* zit. Er is één dag waarop hij de minste tijd in deze fase doorbrengt. Op die dag is de totale tijd van de andere twee fasen dus zo groot mogelijk.

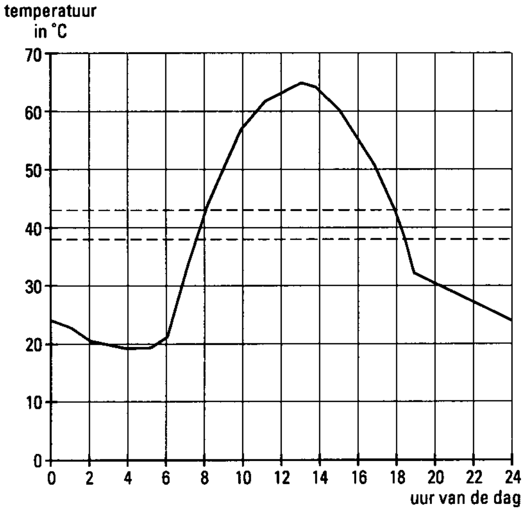
5p **14** □ In welke maand valt deze dag? Licht je antwoord toe.

In figuur 7 zie je bij half maart een horizontale stippellijn staan.

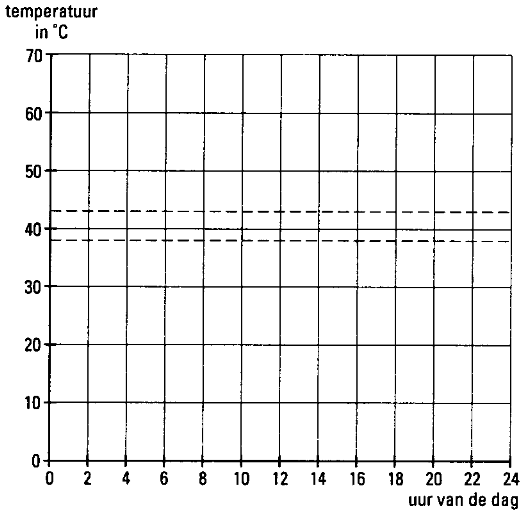
5p **15** □ Teken met behulp van de gegevens van figuur 7 een grafiek van een mogelijk temperatuurverloop op 15 maart in de figuur op de bijlage.

Bijlage bij de vragen 7, 11 en 15

Vraag 11



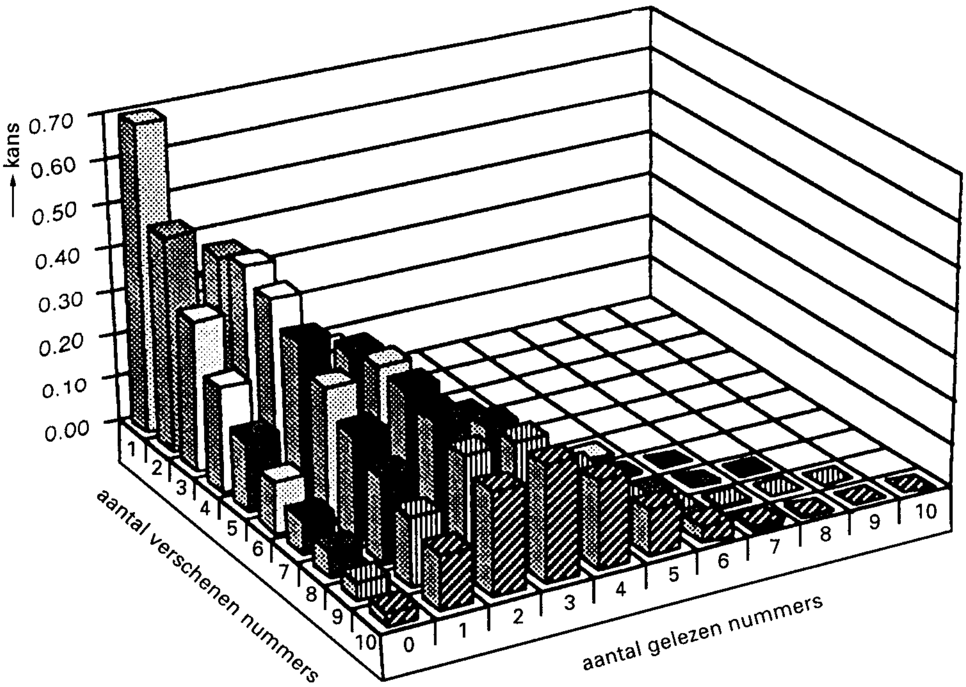
Vraag 15



Opgave 5 Wie leest

Voor adverteerders in een tijdschrift is het van belang te weten hoeveel mensen men met dat tijdschrift bereikt. Daarom onderzoekt men voortdurend hoeveel mensen welke bladen lezen en hoe vaak. Met deze gegevens stelt men voor ieder tijdschrift een eigen *leeskans* op.
In deze opgave beperken we ons tot een tijdschrift met een leeskans van 0,3. Dit betekent dat iedereen, onafhankelijk van een ander, dezelfde kans van 0,3 heeft om een bepaald nummer van dat tijdschrift te lezen. Voor alle duidelijkheid: dat geldt dus steeds voor ieder nummer van dat tijdschrift. Uitgaande van deze leeskans 0,3 heeft men figuur 9 gemaakt. In deze figuur heeft men voor alle mogelijke situaties de bijbehorende kans met een staaf (of staafje) weergegeven.

figuur 9



In bovenstaande figuur is te zien dat bij 5 verschenen nummers van het tijdschrift voor iedereen de kans op 0 gelezen nummers ongeveer gelijk is aan 0,17.

4p **16** □ Laat met een berekening zien dat dit getal 0,17 correct is.

Sommige staven zijn in figuur 9 niet of nauwelijks te zien, omdat ze achter andere staven verborgen zitten. De staaf die hoort bij 2 verschenen nummers en 2 gelezen nummers is helemaal onzichtbaar.
Bij 2 verschenen nummers zijn er drie staven.

6p **17** □ Bereken de drie kansen die bij deze staven horen.

Er zijn, zoals reeds vermeld, in figuur 9 meer staven aanwezig dan er zichtbaar zijn.

5p **18** □ Bereken het totaal aantal staven dat in de figuur aanwezig moet zijn.

Hoe vaker een tijdschrift verschijnt, hoe groter de *trefkans* T is dat een bepaalde persoon één of meer nummers van het tijdschrift gelezen heeft. Uitgaande van de leeskans 0,3 geeft de formule $T = 1 - (0,7)^n$ het verband tussen T en het aantal verschenen nummers n.

4p **19** □ Hoeveel nummers van het tijdschrift moeten volgens deze formule minstens verschijnen opdat de trefkans T groter is dan 0,999? Licht je antwoord toe.