Wiskunde A (oude stijl)

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 03

Tijdvak 2
Woensdag 18 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van vraag 17 is een bijlage toegevoegd.

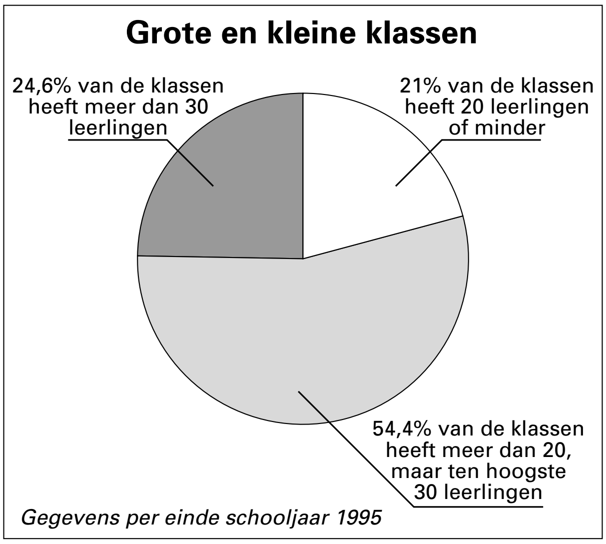
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Samen naar school?

De groepsgrootte van klassen in het basisonderwijs is al jarenlang onderwerp van gesprek. In het onderstaande cirkeldiagram (figuur 1) staat statistische informatie over deze groepsgrootte. Dit plaatje stond in een krantenartikel. In dat artikel stond ook dat er gemiddeld 25,7 leerlingen in één klas zitten.

figuur 1

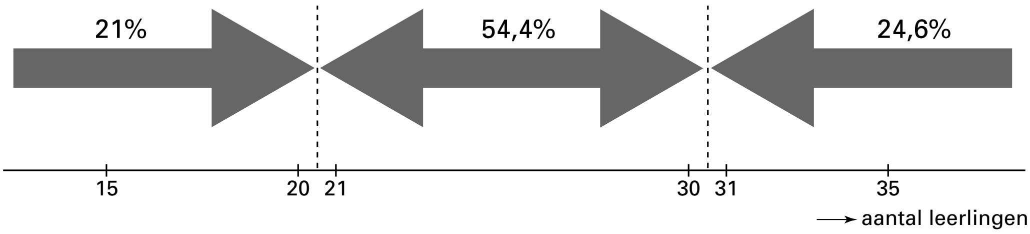


Wij willen met een berekening controleren of uit deze figuur volgt dat er gemiddeld 25,7 kinderen in een klas zitten.
Daarbij gaan wij uit van het volgende:
- een klas met 20 of minder kinderen telt gemiddeld 18 kinderen,
- een klas met 21 tot en met 30 kinderen telt gemiddeld 25 kinderen,
- een klas met meer dan 30 kinderen telt gemiddeld 34 kinderen.

3p **1** ☐ Toon met een berekening aan dat er gemiddeld 25,7 kinderen in een klas zitten.

We willen niet alleen het gemiddelde maar ook de mediaan van de groepsgrootte bepalen. Daartoe tekenen we de informatie uit figuur 1 op een andere manier. Zie figuur 2.

figuur 2



Uit figuur 2 is af te lezen dat 75,4% van de klassen 30 of minder leerlingen bevat. Dat betekent dat het derde kwartiel ongeveer bij 30 leerlingen ligt. Waar de mediaan bij deze verdeling ligt, is echter niet te zien. Wel kan met lineaire interpolatie een schatting worden gemaakt van de mediaan.

4p **2** ☐ Bereken deze schatting van de mediaan.

Verjaardagen zijn op de basisschool altijd bijzonder: het lokaal wordt versierd en er wordt getrakteerd. Hoe meer leerlingen er in een klas zitten, hoe groter de kans dat er een leerling op een schooldag jarig is.
Voor een klas met n leerlingen is de kans P dat een leerling jarig is op een bepaalde schooldag:

$$P = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Bij het tot stand komen van deze formule zijn we van het volgende uitgegaan:
- een jaar heeft 365 dagen,
- de verjaardagen van de leerlingen van een klas zijn willekeurig over het jaar verdeeld,
- in een klas zitten geen twee- of meerlingen.

4p **3** ☐ Leg uit waarom bovenstaande formule juist is.

Als gevolg van de discussies over de klassengrootte hebben enkele basisscholen besloten dat hun klassen volgend jaar slechts 17 leerlingen zullen tellen.
Rob zit in een klas van 34 leerlingen. Hij komt volgend jaar in zo'n klas met 17 leerlingen. Hij denkt dat de kans dat iemand in zijn klas op een bepaalde schooldag jarig is, volgend jaar twee keer zo klein zal zijn.

5p **4** ☐ Ga met berekeningen na of Rob gelijk heeft.

Rob vindt het heel leuk als er iemand jarig is. Hij zit nu nog in een klas van 34 leerlingen. Hij vraagt zich af hoeveel leerlingen er in de klas moeten zitten om de kans op een verjaardag twee keer zo groot te maken.

5p **5** ☐ Hoeveel leerlingen moeten in de klas van Rob zitten om de kans twee keer zo groot te maken dat op een bepaalde schooldag in die klas een leerling jarig is? Licht je antwoord toe.

Oosterschelde

In 1987 is de Oosterschelde afgesloten. Omdat er daarna vrijwel geen getijdenwerking meer is, komen de schorren[1)] droog te liggen. De soort begroeiing die dan op de schorren ontstaat, verandert in het begin snel.

De snelheid waarmee de verandering in plantensoorten plaatsvindt, wordt in de biologie aangegeven met de *dissimilariteit* (mate van verschil).
Deze dissimilariteit D tussen twee jaren A en B wordt als volgt berekend:

$$D = \frac{\text{aantal soorten alleen in jaar A + aantal soorten alleen in jaar B}}{\text{totaal aantal verschillende soorten in beide jaren}} \cdot 100\%$$

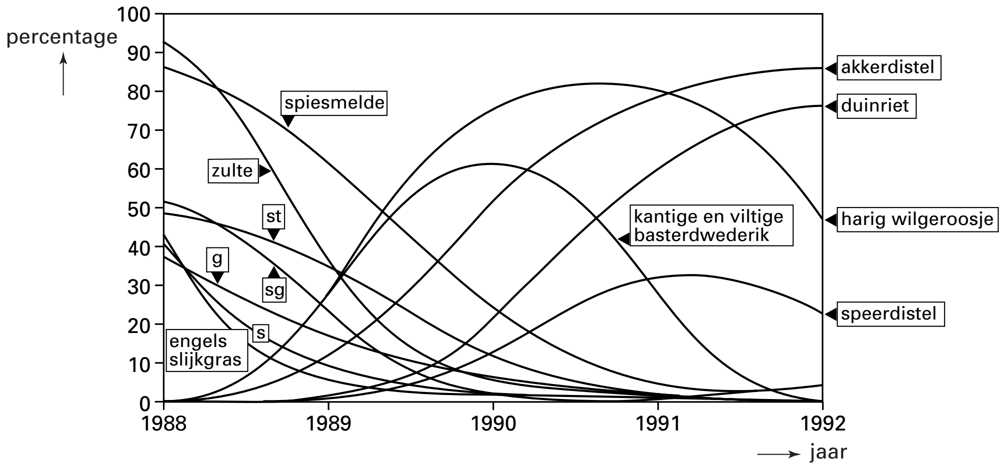
Stel dat op een zekere schor in 1987 vijf soorten voorkomen, gemakshalve aangeduid met de letters a, b, c, d en e. In 1993 vindt men op deze schor de soorten a, b, d, f, g en h.

3p **6** ☐ Laat zien dat D gelijk is aan 62,5%.

4p **7** ☐ Leg uit hoe groot de maximale waarde van D in theorie kan zijn.

In werkelijkheid komen er natuurlijk veel meer plantensoorten op een schor voor. Voor het onderzoek naar het voorkomen van plantensoorten zet men vakken uit van 10 meter bij 10 meter.
In deze vakken op de verschillende schorren in de Oosterschelde is sinds 1988 elke zomer genoteerd welke soorten er voorkomen.
In figuur 3 zie je voor verschillende plantensoorten voor de jaren vanaf 1988 het percentage van de vakken waarin de soort voorkomt. Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat spiesmelde in 1989 in ruim 60% van de vakken voorkomt.

figuur 3



De figuur suggereert dat in 1990 het harig wilgeroosje het plantje is dat het meest voorkomt op de onderzochte schorren. Toch hoeft dat niet het geval te zijn.

3p **8** ☐ Leg uit waarom.

noot 1 Een schor is een stuk land aan een kust dat buitendijks ligt. Hierdoor kan het, maar alleen bij zeer hoog water, onderlopen.

Stel dat een soort in een zeker jaar in 62% van de vakken voorkomt. Dit percentage is bepaald aan de hand van een grote hoeveelheid vakken. Daarom kunnen we zeggen dat de kans dat deze soort dat jaar in een vak voorkomt voor elk vak gelijk is aan 62%.
Op een dergelijke wijze kunnen we met behulp van figuur 3 voor elke plantensoort voor elk jaar een *voorkomenskan*s bepalen.

We bekijken een kleine schor waar 12 vakken op zijn uitgezet, genummerd van 1 tot en met 12.

5p **9** ☐ Bereken de kans dat de speerdistel in 1991 alleen voorkwam in het vak met nummer 7.

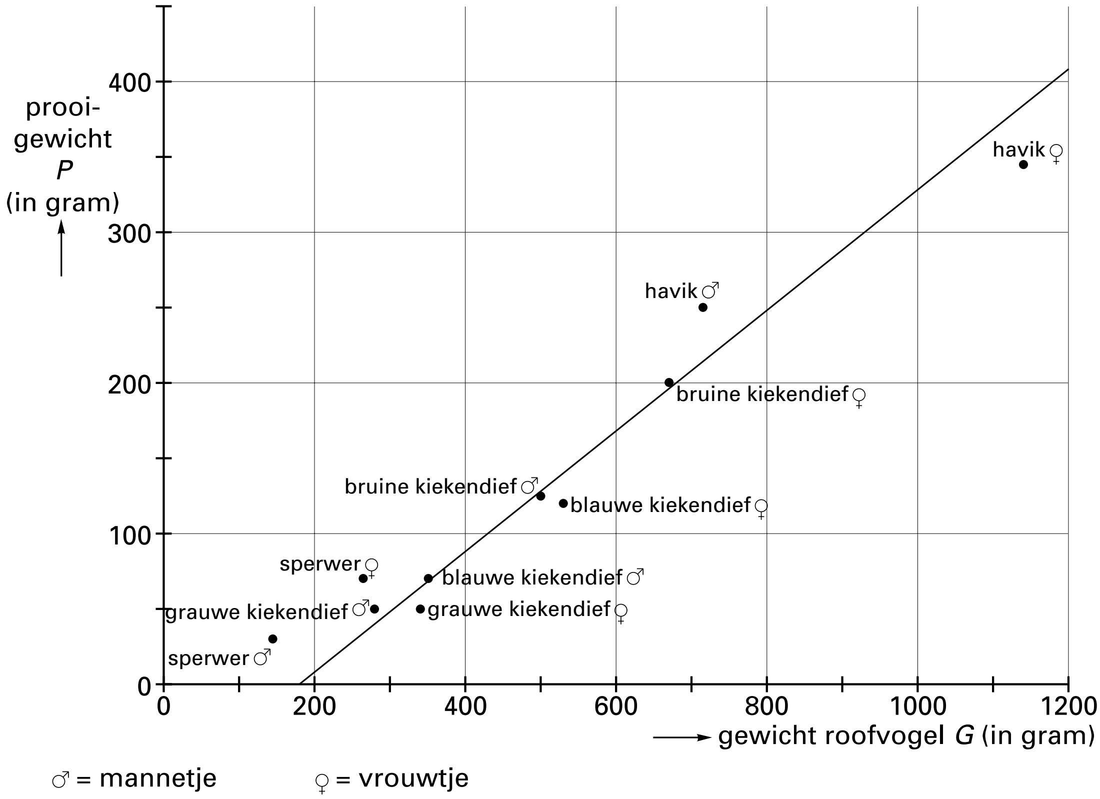
Een onderzoeker, speciaal geïnteresseerd in de akkerdistel, onderzocht in 1995 deze kleine schor met de 12 vakken. Enkele biologiestudenten hadden dat een paar dagen eerder al gedaan. Zij stelden vast dat in 3 van die 12 vakken de akkerdistel voorkwam. De onderzoeker was niet op de hoogte van het onderzoek van de studenten. Hij controleerde niet alle 12 vakken, maar voerde zijn onderzoek slechts uit bij 4 willekeurig gekozen vakken.

4p **10** ☐ Bereken de kans dat deze gemakzuchtige onderzoeker tot de conclusie kwam dat de akkerdistel op deze schor niet voorkwam.

Roofvogels

Roofvogels zijn jagers. Ze jagen op diverse prooien zoals ratten, muizen en vogels.
Uit een onderzoek van de biologen Schipper en Opdam blijkt dat de grootte van de prooidieren samenhangt met de grootte van de roofvogel.
In figuur 4 is te zien dat de grotere roofvogels, zoals verwacht, ook grotere prooidieren vangen. De gebruikte gegevens voor de gewichten van de verschillende roofvogelsoorten en hun prooien zijn gemiddelden.

figuur 4



De samenhang tussen het gewicht G van de roofvogel en het prooigewicht P is redelijk te benaderen met een lineair verband. De grafiek daarvan is in figuur 4 getekend.

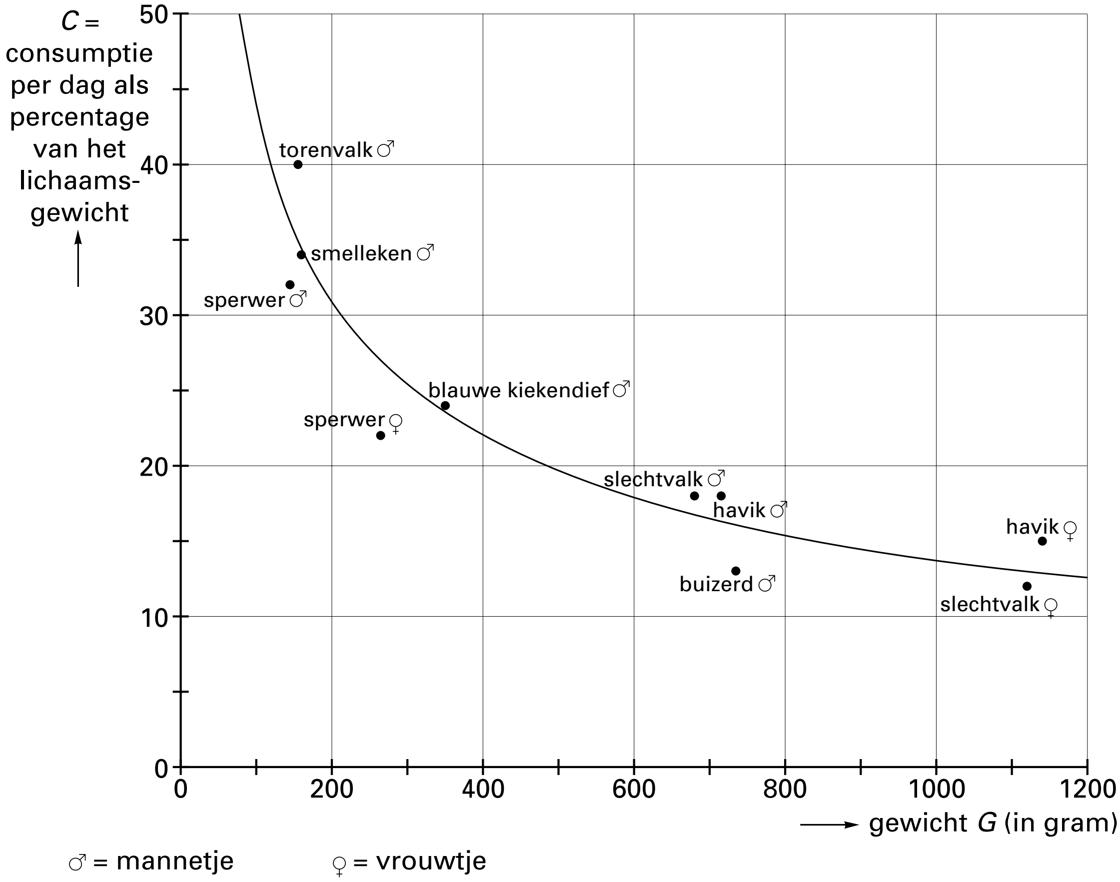
4p **11** ☐ Stel een formule op voor dat lineaire verband tussen P en G.

In figuur 4 is te zien dat bij elk van deze vijf soorten roofvogels de vrouwtjes zwaarder zijn dan de mannetjes. Zo is bij de grauwe kiekendief het vrouwtje ongeveer 20% zwaarder dan het mannetje. Ook voor de andere soorten is te berekenen hoeveel procent het vrouwtje zwaarder is dan het mannetje.

5p **12** ☐ Bij welke van de vijf soorten roofvogels is dat percentage het grootst? Licht je antwoord toe.

Men heeft ook onderzocht hoeveel een roofvogel gemiddeld per dag eet. Daarbij bleek dat kleine roofvogels in verhouding tot hun lichaamsgewicht meer eten dan de grotere soorten. In figuur 5 is dat duidelijk te zien.

figuur 5



Op de verticale as staat C, de consumptie per dag, uitgedrukt in een percentage van het gewicht van de roofvogelsoort.
Het gewicht G van de roofvogelsoort staat op de horizontale as.
In figuur 5 is een kromme lijn getekend die de samenhang tussen G en C redelijk benadert.
Bij die kromme lijn hoort een formule van de vorm:

$$C = a \cdot G^{-0,5}$$

3p **13** ☐ Bereken de waarde van a die bij deze kromme hoort.

Roofvogels eten niet de gehele prooi op. Een mannetjeshavik eet ongeveer 15% van het prooigewicht niet (botjes en andere onverteerbare delen).

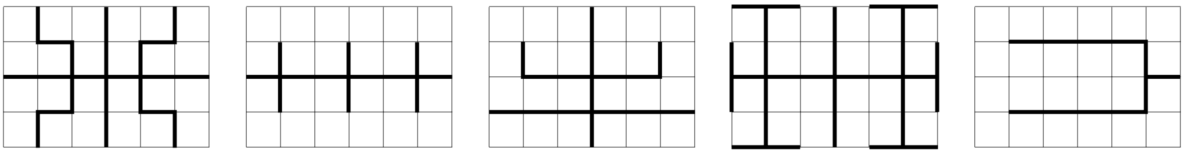
6p **14** ☐ Bereken aan de hand van figuur 4 en figuur 5 hoeveel prooien een mannetjeshavik ongeveer per jaar eet.

Wegen in woonwijken

Bij het bouwen van een nieuwe woonwijk wordt er vooraf nagedacht over een wegennet. Hierbij worden twee soorten wegen onderscheiden: hoofdstraten en woonstraten.
De hoofdstraten zijn brede wegen, nodig voor een goede doorstroming van het verkeer door de wijk. De woonstraten zijn smaller, ze zijn bedoeld voor bestemmingsverkeer.

Bij het ontwerpen kan gekozen worden uit vijf woonwijktypen. In figuur 6 is van elk woonwijktype de plattegrond getekend. Hierin zijn de hoofdstraten dik getekend en de woonstraten dun.

figuur 6



De woonwijk is 1800 meter lang en 1200 meter breed. Door de straten is de wijk verdeeld in 24 vierkante blokken. Zo'n blok is dus 300 bij 300 meter. Binnen een blok bevinden zich woningen, maar ook woonerven, speelplaatsen en plantsoenen.
De hoeveelheid grond die nodig is voor de straten, is voor elk woonwijktype verschillend. Omdat hoofdstraten breder zijn dan woonstraten, is er in woonwijktypen met een groter aantal hoofdstraten meer grond nodig voor de straten en blijft er dus minder ruimte over voor de woningen.
In onderstaande matrix M kan worden afgelezen hoeveel stukken hoofdstraat en hoeveel stukken woonstraat er in elk woonwijktype zijn. Zo'n stuk straat is even lang als één blok.

matrix

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \text{stukken hoofdstraat} & \text{stukken woonstraat} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{radiaal} \\ \text{axiaal} \\ \text{vertakking} \\ \text{raster} \\ \text{U-vorm} \end{array} & \begin{pmatrix} 22 & 36 \\ 12 & 46 \\ 16 & 42 \\ 30 & 28 \\ 11 & 47 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

Eén stuk hoofdstraat heeft een oppervlakte van 6000 m^2 en voor één stuk woonstraat is 3600 m^2 nodig.

4p **15** ☐ Bereken voor elk woonwijktype hoeveel m^2 er in totaal nodig is voor de straten.

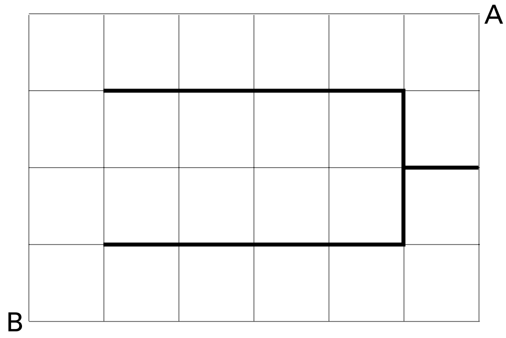
Uitgangspunt bij het bouwen van de woningen in de wijk is, dat er per woning gemiddeld 400 m^2 grond beschikbaar is. Hierbij wordt de gebruikte oppervlakte voor de hoofd- en woonstraten niet meegerekend. Dus een groter aantal hoofdstraten betekent minder woningen. In de verschillende ontwerpen kunnen daarom niet evenveel woningen worden gebouwd.

Binnen de gemeenteraad is er onenigheid over het te kiezen woonwijktype. Een deel van de raad heeft een voorkeur voor het type 'radiaal' vanwege de vlotte doorstroming van het verkeer. Anderen willen liever type 'U-vorm' vanwege het grotere aantal woningen.
Men besluit tot een compromis: het wordt type 'radiaal', maar het aantal woningen moet net zo groot worden als het bij type 'U-vorm' zou zijn geweest. Het gevolg is wel dat er dan per woning minder dan 400 m^2 grond beschikbaar is.

5p **16** ☐ Bereken hoeveel m^2 er in dat geval voor elke woning beschikbaar is.

Omdat in woonstraten veel rustiger gereden wordt, zijn woonstraten veel veiliger voor kinderen. Bekijk het type U-vorm van figuur 7. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 7



De kinderen van de familie Jansen fietsen via woonstraten van punt A naar punt B. Ze mogen van hun ouders hooguit één keer op een kruispunt komen waarop een hoofdstraat uitkomt. Van de hoofdstraten zelf mogen de kinderen geen gebruik maken.

5p **17** ☐ Op hoeveel manieren kunnen deze kinderen zonder omwegen van A naar B fietsen? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij de figuur op de bijlage gebruiken.

Stel dat auto's op een hoofdstraat met een snelheid van 50 km/uur rijden en op een woonstraat met een snelheid van 30 km/uur.
Bij elk woonwijktype noemen we punt A het punt rechtsboven in de figuur en punt B het punt linksonder. Zie bijvoorbeeld figuur 7.
In elk woonwijktype kunnen we de snelst mogelijke route per auto van A naar B zoeken.

5p **18** ☐ Zet de vijf woonwijktypen van figuur 6 op volgorde met als eerste dat type waarbij een auto het snelst van A naar B is. Licht je antwoord toe.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Sinaasappelsap

Een groothandel in citrusvruchten beoordeelt partijen perssinaasappels op de volgende vier kenmerken:

- houdbaarheid (H)
- gehalte aan sap (G)
- uiterlijk (U)
- smaak (S).

Voor elk kenmerk krijgt een partij een beoordeling die varieert van 1 (zeer slecht) tot 5 (zeer goed). De eindbeoordeling is een getal dat wordt gevonden door deze vier getallen op te tellen en die som te delen door 2.

Een recente lading sinaasappels bestond uit vier merken: A, B, C en D.
Deze werden alle vier getest, en dat leverde de volgende resultaten op. Zie tabel 1.

tabel 1

	H	G	U	S
A	2	5	2	3
B	3	4	1	5
C	4	4	3	3
D	2	2	4	5

4p **19** ☐ Bereken welke van de vier merken de beste eindbeoordeling kreeg.

Omdat de sinaasappels vrij snel verwerkt worden tot sap zijn uiterlijk en houdbaarheid minder belangrijk dan sapgehalte en smaak. Men wil een beoordelingsformule waarbij alle vier kenmerken een rol spelen, maar waarbij het gehalte aan sap en de smaak belangrijker zijn dan het uiterlijk en de houdbaarheid. Met deze formule moet de hoogst mogelijke eindbeoordeling even hoog zijn als met de oorspronkelijke berekeningswijze.

4p **20** ☐ Stel zo'n formule op.

Van een zeker merk is gebleken dat 1 kg sinaasappels gemiddeld 60 cl sap zal opleveren. Maar ook bij heel sappige sinaasappels zit er natuurlijk verschil tussen de ene en de andere sinaasappel, en dus ook tussen de ene en de andere kilo.
De hoeveelheid sap per kilo is bij benadering normaal verdeeld. Het gemiddelde is zoals gezegd 60 cl. Hetzelfde onderzoek wees uit dat de standaardafwijking 8 cl is.

Een discotheekhouder betrekt bij de groothandel een hoeveelheid van deze sinaasappels. Hij perst 1 kg van deze sinaasappels uit en schenkt het verse sinaasappelsap in glazen van 18 cl.

5p **21** ☐ Bereken hoe groot de kans is dat er genoeg is voor 3 glazen sap.

Einde