

**Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 22 vragen.**  
**Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.**  
**Voor de beantwoording van de vragen 3 en 19 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.**

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

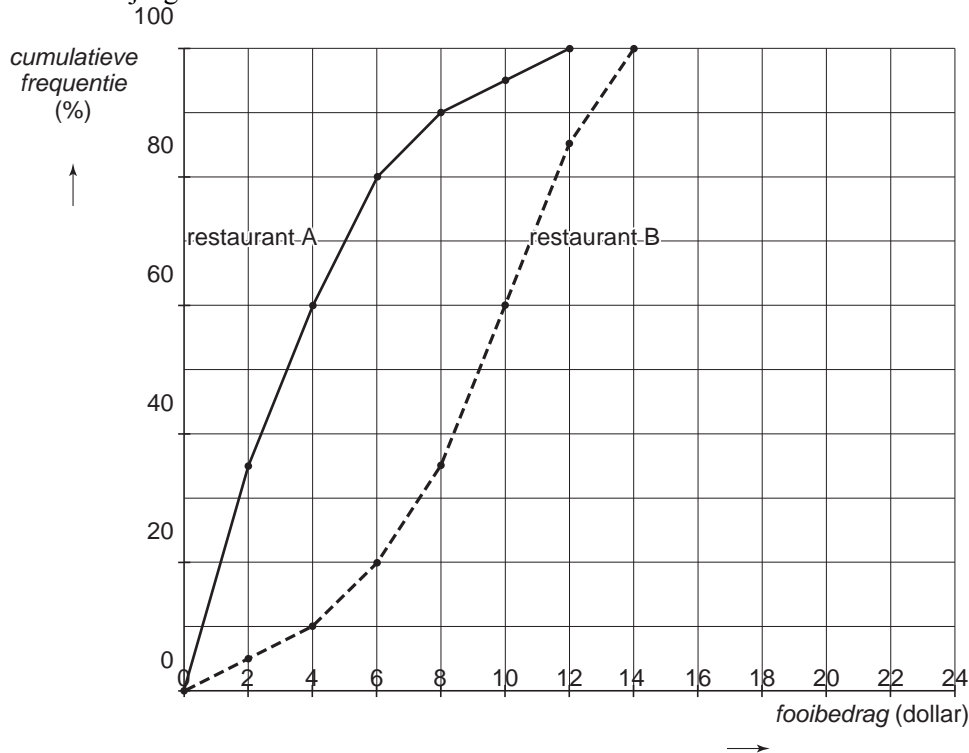
## Fooien

In de Verenigde Staten is het gebruikelijk dat je in een restaurant een flinke fooi geeft aan degene die je bedient. Het basisloon is er zeer laag en daardoor is het bedienend personeel veel meer afhankelijk van fooien dan in Nederland.

In de Verenigde Staten bestudeerde een onderzoeker welke fooien er gegeven werden bij bijna duizend rekeningen in twee restaurants.

In de onderstaande cumulatieve relatieve frequentiepolygonen (figuur 1) zijn de fooien van de twee restaurants A en B verwerkt. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



- 3p 1  In welk restaurant worden er relatief meer fooien tussen de 6 en de 8 dollar gegeven? Licht je antwoord toe.

Met behulp van de klassenmiddens kun je een schatting geven van de gemiddelde fooi in de twee restaurants.

- 4p 2  Bereken op deze manier de gemiddelde fooi in restaurant A.

Hoe hoger de rekening, hoe hoger de fooi, was een resultaat van het onderzoek. Restaurant C is veel duurder dan de restaurants A en B. De rekeningen zijn daar dan ook een stuk hoger en de fooien dus ook. Een fooi onder de 6 dollar komt in restaurant C niet voor, fooien van meer dan 20 dollar komen af en toe voor.

- 4p 3  Teken in de figuur op de uitwerkbijlage een mogelijk cumulatief relatief frequentiepolygoon voor restaurant C.

Uit het onderzoek bleek dat er tussen de fooi  $F$  en de hoogte van de rekening  $R$  een lineair verband bestaat. De onderzoeker vond de volgende gegevens:

- bij een rekening van 20 dollar hoort een fooi van 3,75 dollar;
- bij een rekening van 85 dollar hoort een fooi van 12 dollar.

- 4p 4  Stel een formule op voor dit lineaire verband.

## Wiel

Bij het wielrennen zie je soms dat wielen van fietsen dicht zijn. Op het normale wiel met spaken is dan een plastic schijf aangebracht.

Op een racefiets met dichte wielen kun je harder fietsen dan op een racefiets met open wielen: de luchtweerstand is bij een dicht wiel minder dan bij een open wiel. Dat is onderzocht op de volgende manier.

Men laat een *dicht wiel* en een *open wiel* vrij draaien. Door de luchtweerstand gaan ze steeds langzamer draaien. Met behulp van een fietscomputer wordt de snelheid van de wielen gemeten.

In tabel 1 staan enkele meetgegevens voor een open wiel.

tabel 1

| open wiel |      |      |      |      |      |     |     |
|-----------|------|------|------|------|------|-----|-----|
| $t$       | 0    | 20   | 40   | 60   | 80   | 100 | 120 |
| $V$       | 30,0 | 23,5 | 18,4 | 14,5 | 11,3 | 8,9 | 7,0 |

Hierin is  $t$  de tijd in seconden en  $V$  de snelheid in kilometer per uur.

Het wiel heeft een beginsnelheid van 30 km/uur gekregen.

De snelheid neemt bij benadering exponentieel af.

- 5p 5  Bereken met behulp van de tabel het percentage waarmee de snelheid *per 10 seconden* afneemt.

Een dicht wiel en een open wiel krijgen een beginsnelheid van 20 km/uur. We laten de wielen drie minuten draaien. Hierbij passen de volgende formules:

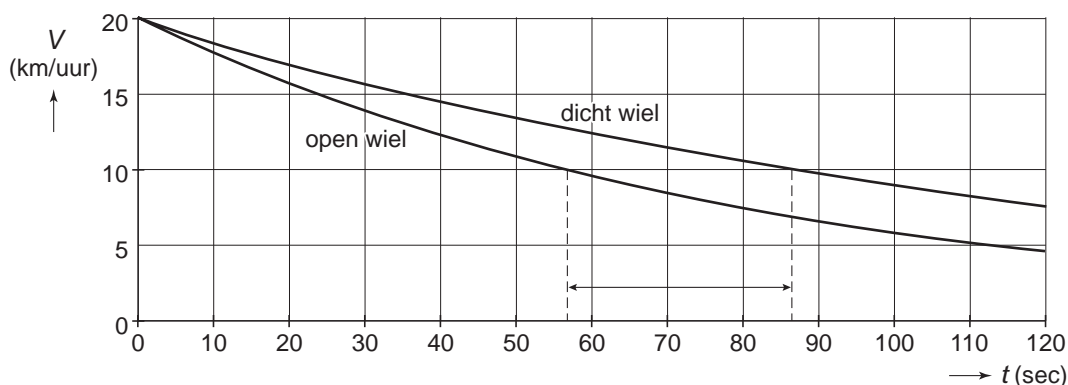
$$\text{Dicht wiel: } V_{\text{dicht}} = 20 \cdot 0,9920^t$$

$$\text{Open wiel: } V_{\text{open}} = 20 \cdot 0,9879^t$$

In beide formules is  $t$  in seconden en  $V$  in kilometer per uur.

In figuur 2 zijn de grafieken getekend van deze formules voor de eerste twee minuten.

figuur 2



Op een zeker moment is de snelheid van een wiel half zo groot geworden. Bij het dichte wiel is dat later dan bij het open wiel. In figuur 2 is met een pijl aangegeven hoe groot het verschil in tijd is.

- 5p 6  Bereken met behulp van de formules dit verschil in tijd in seconden.

Beide wielen krijgen op hetzelfde moment een snelheid van 20 km/uur en we laten ze weer drie minuten draaien. Het dichte wiel heeft steeds een hogere snelheid.

- 4p 7  Bereken met behulp van de formules het grootste verschil in snelheid tussen de twee wielen.

## Muntenrij

Je gooit vijf keer met een muntstuk. Als je kop gooit, schrijf je een K op en als je munt gooit een M. Je kunt dan een rijtje krijgen zoals in figuur 3. Zo'n rijtje met de letters K en M noemen we een *muntenrij*.

figuur 3

K M M K M

Ga er in deze opgave steeds van uit dat de kans op kop gooien en de kans op munt gooien even groot zijn.

Tom denkt dat vijf keer achter elkaar kop gooien (dus de muntenrij K K K K K) veel onwaarschijnlijker is dan de muntenrij K M M K M van figuur 3.

- 3p 8  Is de kans op de muntenrij K K K K K kleiner dan de kans op de muntenrij K M M K M? Licht je antwoord toe.

In de muntenrij van figuur 3 komt twee keer K en drie keer M voor. Er zijn verschillende muntenrijen mogelijk met twee keer K en drie keer M.

- 3p 9  Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn.

Tom gooit net zo lang met een muntstuk tot hij drie keer achter elkaar munt heeft gegooid.

In de muntenrij van figuur 4 lukte dat pas na elf keer gooien.

figuur 4

K M K K M K M K M M M

Tom begint met een nieuwe muntenrij. Hij stopt zodra hij M M M gegooid heeft, dus zodra hij drie keer achter elkaar munt heeft gegooid.

- 4p 10  Bereken de kans dat Tom na 5 keer gooien voor het eerst M M M achter elkaar ziet staan in zijn muntenrij.

Herma komt op bezoek bij Tom. Herma daagt Tom uit voor een spelletje.

Eerst mag Tom een rijtje met drie letters (bestaande uit K's en/of M's) kiezen.

Daarna kiest Herma een ander rijtje met drie letters.

Dan wordt er met een muntstuk gegooid. Degene wiens rijtje van drie het eerst voorkomt in de muntenrij, wint het spelletje. Het muntstuk wordt net zo lang gegooid tot er iemand gewonnen heeft.

Tom kiest het rijtje M M M, want dat valt gemakkelijk op in een lange muntenrij.

Herma kiest daarna het rijtje K M M.

Dat is heel slim van Herma, want zodra er kop is gegooid, kan Tom nooit meer winnen.

- 3p 11  Leg uit dat Tom nooit meer kan winnen zodra er kop is gegooid.

De enige mogelijkheid voor Tom om te winnen is dus dat er meteen vanaf het begin van het spelletje drie keer munt wordt gegooid.

- 4p 12  Toon aan dat de kans dat Herma het spelletje wint zeven keer zo groot is als de kans dat Tom het spelletje wint.

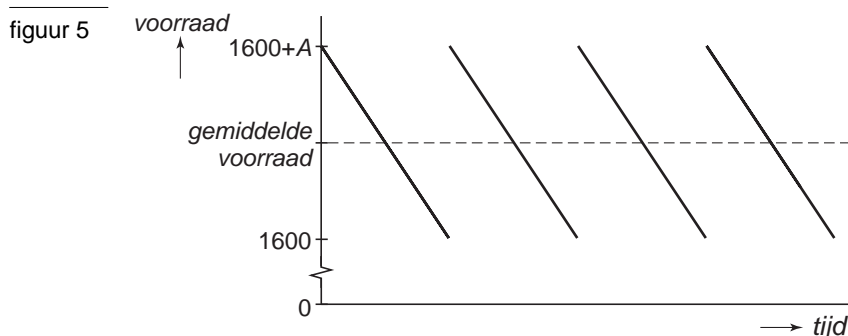
## Voorraadkosten

FuelMaster produceert benzinepompen, die gebruikt worden door tankstations. In elke benzinepomp zit een pomp. FuelMaster heeft elk jaar 40 000 pompen nodig voor zijn productie. FuelMaster bestelt zijn pompen bij PumpTech. De bestelkosten bedragen 0,50 euro per pomp plus 300 euro per bestelling.

- 3p 13  Bereken de jaarlijkse bestelkosten als er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.

FuelMaster wil altijd minimaal 1600 pompen in voorraad hebben (dat is een reservevoorraad voor zo'n twee weken productie).

Voor het aantal pompen dat FuelMaster op enig moment in voorraad heeft, is een model opgesteld. Zie daarvoor de schets in figuur 5. De productie en dus ook het verbruik van de pompen is gelijkmatig over het jaar verdeeld. Elke bestelling wordt afgeleverd op het moment dat de voorraad nog 1600 stuks groot is. Het aantal pompen dat FuelMaster per keer bij PumpTech bestelt, noemen we  $A$ .



Voor het in voorraad houden van de pompen heeft FuelMaster ook kosten. Het in voorraad houden van één pomp kost 6 euro per jaar.

De jaarlijkse voorraadkosten kunnen berekend worden door de *gemiddelde voorraad* pompen te vermenigvuldigen met de jaarlijkse kosten per pomp.

- We gaan er nog even van uit dat er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.
- 3p 14  Laat zien dat de jaarlijkse voorraadkosten dan 21 600 euro bedragen.

De afdeling inkoop van FuelMaster onderzoekt bij welke bestelgrootte de jaarlijkse kosten voor het bestellen en in voorraad houden zo laag mogelijk zijn. Men heeft daarvoor de volgende formule opgesteld:

$$K = 29600 + \frac{12000000}{A} + 3A$$

Hierin is  $K$  het totaal van de jaarlijkse bestel- en voorraadkosten in euro en  $A$  het aantal pompen dat per keer besteld wordt.

Zoals je aan de formule kunt zien, zijn de jaarlijkse kosten altijd hoger dan 29 600 euro.

- 3p 15  Onderzoek uit welke vaste bedragen deze 29 600 euro is opgebouwd.

De formule voor  $K$  kan ook geschreven worden als:

$$K = 29600 + 12000000 \cdot A^{-1} + 3A$$

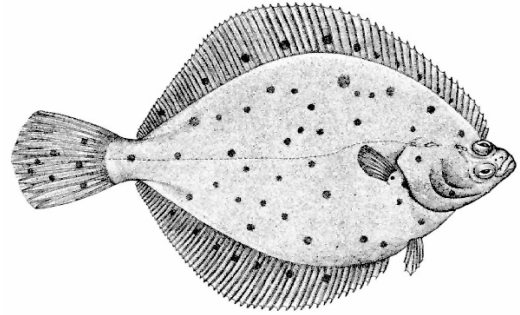
Voor een zekere waarde van  $A$  zal  $K$  een minimum hebben.

- 5p 16  Stel de afgeleide van  $K$  op en bereken met behulp daarvan de bestelgrootte  $A$  waarbij  $K$  minimaal is.

## Platvissen

Er bestaan diverse soorten platvissen, bijvoorbeeld schollen en tongen. In de afbeelding hiernaast zie je een schol.

afbeelding



De lengte van 8 jaar oude, vrouwelijke schollen is bij benadering normaal verdeeld. De gemiddelde lengte is 30,8 cm en de standaardafwijking is 4,6 cm.

- 3p 17 □ Bereken hoeveel procent van deze 8 jaar oude vrouwtjesschollen langer is dan 33 cm.

De lengte van de mannetjesschollen van 8 jaar oud is ook bij benadering normaal verdeeld. Ze hebben een gemiddelde lengte van 27,4 cm. Deze mannetjesschollen zijn kleiner dan de 8 jaar oude vrouwtjesschollen. Slechts 5% van deze mannetjes is langer dan 33 cm.

- 4p 18 □ Bereken de standaardafwijking van de lengte van de 8 jaar oude mannetjesschollen. Rond je antwoord af op 1 decimaal.

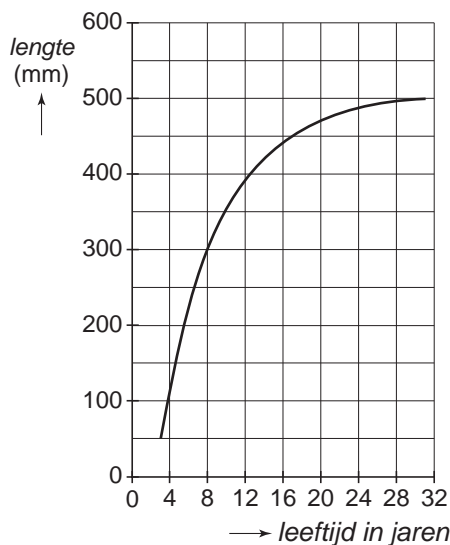
In de Beringzee is het onderzoekers van het Alaska Fisheries Science Center gelukt de groei en ontwikkeling van vrouwelijke schollen over een lange periode te volgen. Deze schollen kunnen maar liefst 30 jaar oud worden.

Hieronder staan twee grafieken met informatie over deze schollen.

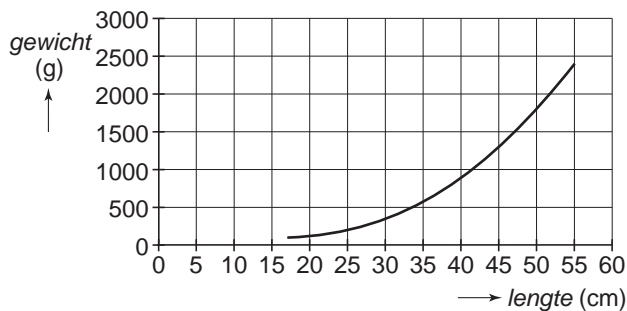
In figuur 6 zie je het verband tussen de leeftijd en de lengte.

In figuur 7 zie je het verband tussen de lengte en het gewicht.

figuur 6



figuur 7



De twee grafieken staan vergroot op de uitwerkbijlage.

Door deze grafieken te combineren, is te achterhalen wat het gewicht is van een vrouwtjesschol als je de leeftijd kent.

- 3p 19  Wat is het gewicht van een vrouwtjesschol van 14 jaar oud? Licht je antwoord toe met behulp van de grafieken op de uitwerkbijlage.

Ook bij de tong neemt het gewicht toe met de leeftijd. De onderzoekers in Alaska vonden dat het gewicht van de tong wordt benaderd door de formule:

$$W = 2,867 \cdot (1 - 0,93 \cdot 0,9094^t)^3$$

Hierin is  $W$  het gewicht in kilogram en  $t$  de leeftijd in jaren.

- 3p 20  Bereken de leeftijd in jaren van een tong van 1,5 kg.

Een *cohort* vissen is een groep vissen van één soort die vrijwel tegelijk zijn geboren.

De *biomassa*  $B$  van een cohort vissen is het totale gewicht (in kg) van die vissen.

Voor het cohort van 1000 tongen is een formule opgesteld voor het aantal nog levende tongen  $N$  na  $t$  jaren:

$$N = 1000 \cdot 0,9048^t$$

Voor de biomassa  $B$  geldt dus  $B = N \cdot W$ .

Het aantal tongen in het cohort neemt ieder jaar af, maar de tongen zelf worden steeds zwaarder.

Na 7 jaar ligt de biomassa van dit cohort in de buurt van 200 kg.

- 3p 21  Toon dit met een berekening aan.

Naarmate de tijd verstrijkt, neemt het aantal tongen dus af maar neemt hun gewicht toe. De biomassa zal eerst toenemen, maar later weer afnemen.

- 4p 22  Bereken de maximale biomassa van het cohort tongen.

---

**Einde**